PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 20. 15. Oktober 1916. 17. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 21 am 14. Oktober 1916.

INHALT:

Originalmitteilungen:

R. Swinne, Zum Ursprung der γ-Strahlenspektren und Röntgenstrahlenserien. S. 481.

R. Glocker, Über die Abhängigkeit der Sekundärstrahlungs-Emissionskoeffizienten von der Wellenlänge der erregenden Röntgenstrahlen. S. 488.

A. Sommerfeld, Zur Theorie des Zeeman-Effekts der Wasserstofflinien, mit einem Anhang über den Stark-Effekt. S. 491.

P. Debye, Quantenhypothese und Zeeman-Effekt. S. 507.

P. Debye, Die Feinstruktur wasserstoffähnlicher Spektren. S. 512.

J. Koenigsberger, Bemerkung über die Umladung von Kanalstrahlen. S. 516.

Besprechungen:

J. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung nach den Bedürfnissen der technischen Mechanik und Elektrizitätslehre. S. 517.

Nachtrag zur Übersicht über die Kriegsbeteiligung der Deutschen Physiker. S. 518.

Personalien. S. 518.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1916/17. S. 519.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zum Ursprung der γ-Strahlenspektren und Röntgenstrahlenserien.

Von Richard Swinne.

I. Nach der Entdeckung der charakteristischen Röntgenstrahlen durch Barkla hat Rutherford auch die γ-Strahlen als solche in den Radioelementen erregte harte Fluoreszenzstrahlungen aufzufassen gesucht. Die von ihm und Richardson ausgeführte genaue Untersuchung der γ-Strahlenabsorption in einem Element von geringem Atomgewicht, wie Aluminium, ergab in der Tat mehrere, durch ihre Härte stark unterscheidbare Gruppen von γ-Strahlen, von welchen einige zweifellos den zu erwartenden charakteristischen Röntgenstrahlungen der betreffenden Elemente entsprachen. Die im Anschluß an die Lauesche Entdeckung ermöglichte Röntgenspektrometrie gestattete Rutherford und Andrade[1]) die γ-Strahlenspektren von RaB und RaC auszumessen und die Übereinstimmung der Hauptlinien des weichen γ-Strahlenspektrums von RaB mit denjenigen des L-Serienspektrums von Blei (im Sinne der Isotopentheorie) festzustellen.

Nun erlaubt die von Bohr entwickelte Quantentheorie der Spektralserien[2]) zusammen mit den Rutherfordschen Vorstellungen vom Atombau die Bildung von γ-Strahlenspektren genauer zu betrachten und läßt außer den Fluoreszenzröntgenspektren noch andere Linien erwarten, wenngleich deren genaue Berechnung am Mangel genügender Exaktheit der vorliegenden Theorie scheitert.

Wir nehmen somit einen sehr kleinen positiven Atomkern an, dessen Ladung, nach van den Broek[1]), der Nummer des Elements im periodischen System gleichgesetzt wird; die den Kern neutralisierenden Elektronen beschreiben um ihn (in bestimmten Anordnungen) geschlossene Bahnen (in Ringen nach Bohr). Die im periodischen System benachbarten Elemente unterscheiden sich nicht allein durch ihre Kernladung, sondern auch durch die Größe der Bahnachsen der Elektronenanordnungen. Dagegen möge die Art der Anordnung der Elektronen — von den peripherischen abgesehen — innerhalb des periodischen Systems erhalten bleiben: hierfür spricht der gleichmäßige Übergang von Element zu Element bei den bereits in weiten Grenzen untersuchten K- und L-Serien (und der jüngst entdeckten M-Serie[2])).

Wird nun ein α- oder ein β-Teilchen aus dem Atomkern bei einer radioaktiven Umwandlung ausgeschleudert, so wird dieses den Kern verlassende geladene Teilchen beim Durchfliegen der den Kern umgebenden Elektronenanordnungen aus ihnen Elektronen abtrennen, in Abhängigkeit von der Eigengeschwindigkeit des Teilchens und der Loslösungsarbeit der Elektronen der betreffenden Anordnungen. Entsprechend der von Bohr übernommenen Lenardschen Vorstellung von der Lichterzeugung bei Phosphoren[3]) bedeutet so eine Elektronenabtrennung die Erregung zur Lichtemission der betreffenden Anordnung; die Lichtemission aber erfolgt erst bei der Rückkehr eines Elektrons auf den leeren Platz des betreffenden Systems. Kossel[4]) entnimmt dies Elektron einem der mehr nach außen gelegenen Elektronensysteme, während Sommerfeld[5]) durch Quantelung der

1) E. Rutherford und E. N. da C. Andrade, Phil. Mag. (6) **27**, 854, **28**, 269, 1914.
2) Vgl. E. Riecke, diese Zeitschr. **16**, 222, 1915.

1) A. van den Broek, diese Zeitschr. **14**, 32, 1913.
2) Vgl. W. Kossel, Ann. d. Phys. (4) **49**, 237, 1916.
3) P. Lenard, Ann. d. Phys. (4) **31**, 671ff., 1910.
4) W. Kossel, Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 953, 1914.
5) A. Sommerfeld, Münchn. Ber., Math.-nat. Kl., 425, 459, 1915.

Elektronenbahnen noch verschiedene Zustände dieser Anordnungen heranzieht. Findet nun der Ersatz der leeren Plätze der inneren Elektronensysteme des zerfallenden Atoms noch vor dem sprungweisen Übergang der Bahnachsen dieser Anordnungen von der für das ursprüngliche Element charakteristischen Größe zu derjenigen des neu entstehenden Elements statt oder erst nach dieser Neuordnung der Elektronen des Atoms, wodurch ja die Atomumwandlung beendet erscheint? Erfolgt diese Elektronenneuordnung erst später, so stimmen die bei der Ausfüllung der leeren Plätze der Elektronensysteme ausgesandten Spektrallinien mit den für das ursprüngliche Element zu erwartenden nicht genau überein. Vielmehr hätten im Falle einer β-Strahlenumwandlung die Wellenlängen kürzer auszufallen, da hier der Kern eine größere Ladung im Vergleich mit der ursprünglichen trägt; im Fall einer α-Strahlenumwandlung aber länger. Die sprungweise Veränderung der Bahnachsen hätte bei den β-Umwandlungen eine entsprechende Energieausstrahlung zur Folge, welche unten angenähert berechnet werden wird. Da aber dieser Sprung im Fall von α-Umwandlungen Arbeit kostet, so wäre bei diesen Radioelementen eine Absorptionsfähigkeit für die betreffenden Wellenlängen zu erwarten; auch könnte in diesem α-Strahlen-Fall der Sprung weniger leicht als bei den β-Umwandlungen erfolgen. Findet aber der Ersatz der leeren Elektronenplätze erst nach bereits erfolgtem Sprung der maßgebenden Elektronensysteme statt, so gehören die emittierten Linien genau dem neuentstandenen Element an. Weitere Verwicklungen wären dadurch möglich, daß mehr als ein Elektron aus einem Elektronensystem beim Hindurchfliegen des aus dem Atomkern herausgeschleuderten Teilchens entfernt wird. Hierdurch nimmt der Kern eine höhere positive Ladung an[1]), und entsprechend werden auch die Emissionsfrequenzen verändert — erhöht bzw. vermindert in Abhängigkeit davon, ob die Elektronenrückkehr nach dieser bzw. aus dieser Elektronenanordnung erfolgt. Findet gleichzeitig die Ausfüllung zweier leerer Plätze einer Anordnung statt, und ist dieser Vorgang mit der Aussendung eines einzigen Lichtquants verbunden, so treten neue Frequenzen auf, welche etwa das Doppelte der normalen betragen. Dieses wäre am ehesten bei solchen radioaktiven Umwandlungen zu erwarten, bei welchen die Elektronensysteme von Teilchen sehr hoher Geschwindigkeit durchsetzt werden.

Somit hätte man speziell bei β-Strahlern Röntgenspektralserien zu erwarten, welche — durch den sprungweisen Übergang vom Zustand des ursprünglich vorhandenen Elements zu demjenigen des neu entstandenen bedingt — künstlich nie erzeugt werden könnten; auch wäre mit den für das neu gebildete Element charakteristischen Spektren zu rechnen. Bei der Prüfung der γ-Strahlen ist aber auch zu beachten, ob das gegebene Radioelement rein zur Untersuchung gelangt oder zusammen mit anderen, speziell mit seinen Zerfallsprodukten, da ja in diesen die normalen Röntgenserien erregt werden könnten. Nun weist in der Tat das von Rutherford und Andrade ausgemessene Spektrum der weichen γ-Strahlen von *RaB* (im Gleichgewicht mit seinen Zerfallsprodukten) nicht allein in seinen Hauptlinien und manchen anderen[1]) volle Übereinstimmung mit den entsprechenden Linien von Blei auf, sondern zeigt außerdem, wenn auch schwächer, alle wichtigeren Linien von Wismut, des Isotopen von RaC_1, des Umwandlungsprodukts von *RaB*. Vgl. nebenstehende Tabelle 1; die *L*-Serienlinien sind der erwähnten Frimanschen Arbeit entlehnt. Ob auch die Linien von Polonium, des Isotopen von *RaC'*, des äußerst kurzlebigen Zerfallsprodukts von RaC_1 — wenn auch abgeschwächt — im genannten γ-Strahlenspektrum vorkommen, ist zweifelhaft, da seine stärkeren Linien in der Nähe anderer von *Pb* bzw. *Bi* liegen; immerhin ergibt sich seine stärkste Linie zu $1{,}109 \times 10^{-8}$ cm, folglich in der Nähe von 1,100, einer feinen *RaB*-Linie, und seine *l*-Linie — durch Extrapolation — zu $1{,}280 \times 10^{-8}$ cm, somit nicht weit von 1,286, einer anderen feinen *RaB*-Linie. Während ursprünglich von Rutherford und Richardson[2]) bei *RaC* keine weichere γ-Strahlung nachgewiesen werden konnte, erwähnt Rutherford[3]) ganz kurz, daß nach Richardson auch *RaC* etwas γ-Strahlen aussendet, welche gleich stark von Blei absorbiert werden, wie die weichen γ-Strahlen von *RaB*; doch scheint es sich hier eher um härtere Strahlen als die der *L*-Serie zu handeln — immerhin ist somit die Herkunft der *Bi*-Linien im *RaB*-Spektrum noch nicht klargestellt.

2. Die Theorie von Bohr und auch ihre von Sommerfeld vorgenommene Weiterentwicklung verwendet einen Quantenansatz, wonach die ausgestrahlte Schwingungszahl ν durch den Energieunterschied des Übergangs aus der ursprünglichen in die spätere Bahn des Elektrons gemessen wird:

1) Vgl. W. Kossel, a. a. O. S. 960, Anm. 2.

1) E. Friman, Diss. Lund 1916, S. 45; auch Lunds Universitets Årsskrift N. F. Avd. 2, Bd. 12, Nr. 9.
2) E. Rutherford u. H. Richardson, Phil. Mag. (6) 25, 722, 1913.
3) E. Rutherford, Phil. Mag. (6) 28, 314, 1914.

Tabelle I.

Radium *B* weiches γ-Strahlenspektrum		Blei *L*-Serienspektrum		Wismut *L*-Serienspektrum	
Wellenlänge	Stärke	Wellenlänge	Stärke	Wellenlänge	Stärke
—		—		0,762 × 10⁻⁸ cm	0
				0,790	2
0,793 × 10⁻⁸ cm	*m*	0,792 × 10⁻⁸ cm	0	0,794	1
				0,810	3
0,809	*m*	—			
—		0,816	1	—	
—		0,820	1	—	
0,838	*m*	0,842	3	—	
0,853	*m*	—		—	
0,917	*f*	—			
—		—		0,923	2
				0,937	2
				0,950	8
0,953	*m*	0,952	2	0,954	6
—		0,968	2		
				0,977	2
0,983	*s*	0,983	9		
—		—		0,992	2
1,006	*m*	1,008	2	—	
1,029	*m*	1,023	2	—	
1,055	*f*			1,059	1
1,074	*f*	—		—	
		1,091	0	—	
1,100	*f*				
1,141	*m*	—		1,144	10
				1,153	3
1,175	*s*	1,175	10	—	
		1,186	3	—	
1,196	*m*				
1,219	*f*	—		—	
1,266	*f*	—		—	
1,286	*f*	—		—	
1,315	*f*	—		1,317	
1,349	*m*	1,348		—	
1,395	*m*	—		—	

$$h\nu = W_1 - W_2 \qquad (1)$$

(h das Plancksche Wirkungsquantum).

Sommerfeld rechnet nicht allein mit kreisförmigen, sondern auch mit elliptischen Elektronenbahnen, wobei aber die Exzentrizität dieser Bahnen gequantelt wird, d. h. auf ausgezeichnete einzelne Werte beschränkt wird. Die kreisförmige Bahn gilt als die wahrscheinlichste und der Übergang eines Elektrons aus einer Bahn von größerer Exzentrizität zu so einer von geringerer oder wenigstens gleicher Exzentrizität scheint allein zulässig zu sein. Daher gehen die stärksten Linien auf Übergänge zwischen wenig exzentrischen, insbesondere kreisförmigen Bahnen zurück, während die übrigen Übergänge die schwächeren Trabanten liefern. Für ellipsenförmige Bahnen ergibt sich die Energie eines Elektrons auf Grund der von Sommerfeld[1]) benutzten Voraussetzungen, jedoch ohne die von ihm verwandte, verkürzende Reihenentwicklung, zu

$$W = m_0 c^2 \left[\frac{n' + n\gamma}{(n'^2 + 2nn'\gamma + n^2)^{1/2}} - 1 \right]; \qquad (2)^{1})$$

wobei

$$\gamma = \left[1 - \frac{4\alpha}{n^2} (E/e)^2 \right]^{1/2}, \qquad (3)$$

n und n' sind die Sommerfeldschen Quantenzahlen, deren Summe die für das betreffende Elektronensystem mögliche Anzahl von Elektronenbahnen angibt (z. B. $n + n' = 2$ allein 2 Bahnen, die kreisförmige und eine ellipsenförmige). Im Falle einer Kreisbahn erhält man einfach

$$W_{n'=0} = m_0 c^2 (\gamma - 1) = m_0 c^2 \left\{ \left[1 - \frac{4\alpha}{n^2} (E/e)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\} \qquad (4)$$

oder, entwickelt, angenähert

$$W_{n'=0} = -\frac{Nh}{n^2} (E/e)^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha}{n^2} (E/e)^2 + 2 \frac{\alpha^2}{n^4} (E/e)^4 + 5 \frac{\alpha^3}{n^6} (E/e)^6 + 14 \frac{\alpha^4}{n^8} (E/e)^8 + \cdots \right\}. \qquad (4a)$$

1) a. a. O. S. 464, 499.

1) Anm. bei der Korrektur. Diese Gleichung stimmt mit Gl. (17) bei P. Debye, Gött. Nachr., Mathem.-phys. Kl., 24. Juni 1916 überein.

Auch die Formel (2) kann durch einen ähnlichen Ausdruck ersetzt werden

$$W = -\frac{Nh}{(n'+n)^2}(E/e)^2 f, \qquad (5)$$

wo f eine Funktion von n, n', α und (E/e) ist, welche in zweiter Annäherung gleich

$$\left\{1 + \frac{\alpha}{(n+n')^2}(E/e)^2\left(1 + 4\frac{n'}{n}\right)\right\}$$

kommt. Hierbei bedeuten c die Lichtgeschwindigkeit, m_0 und e die Ruhemasse bzw. die Ladung des Elektrons, E die auf das betrachtete Elektron wirkende elektrische Ladung des Kernes und der übrigen Elektronen. Die Rydbergsche Konstante N ist gleich $\frac{2\pi^2 m_0 e^4}{h^3}$ und $\alpha = \left(\frac{\pi e^2}{hc}\right)^2$.

Die genaue Prüfung der Sommerfeldschen Theorie der mehrfachen Spektrallinien leidet unter der noch nicht genügend starken Kenntnis des Wertes gewisser, in die Formeln eingehender allgemeiner Konstanten, insbesondere von e und h. Schließt man aus obigen Gleichungen für N (in cm^{-1} gemessen) und α das Wirkungsquantum h aus, so erhält man

$$\alpha = \left[\frac{\pi (e/m_0) eN}{2c^2}\right]^2.$$

Während $e/m_0 = 5{,}31 \times 10^{17}$ (Schaefer[1])), $N = 1{,}097 \times 10^5$ (Bohr[2])) und $c = 3{,}000 \times 10^{10}$ genügend genau bekannt sind, schwanken die für e gefundenen Werte noch zwischen 4,65 und $4{,}85 \times 10^{-10}$; nach Millikan[3]) beträgt $e = 4{,}774 \times 10^{-10}$. Somit kann α zwischen $1{,}32$ und $1{,}34 \times 10^{-5}$ liegen, und die Schwingungsdifferenz der Balmerschen Serie $\Delta\nu_H = \frac{4\alpha N}{2^4}$ könnte 0,361 bis 0,369 betragen (0,365 bei dem Millikanschen e-Werte). Demnach wäre der Wert von Fabry und Buisson für $\Delta\nu_H$ (H_α) gleich 0,307 um 20 Proz. gegenüber dem theoretischen zu niedrig. Nach der Sommerfeldschen Theorie der H_α-Linie wäre dies sehr wohl möglich, da ja die Schwingungsdifferenz, gerechnet von der Mitte der zwei stärksten linken Linien bis zur Mitte der zwei stärksten rechten[4]), eine Erhöhung um 25 Proz. verlangt, um den theoretischen Wert von $\Delta\nu_H$ zu erhalten (eine Erhöhung um 11 Proz., falls man von der Hauptlinie links bis zur Hauptlinie rechts mißt[5]).

Der $\alpha = 1{,}33 \times 10^{-5}$ entsprechende Wert von h beträgt $6{,}53 \times 10^{-22}$ erg. sek.

Durch Einführung der W-Werte aus (5) in (1) erhält man

$$\nu = N\left[(E_1/e)^2 \frac{f_1}{(n_1+n_1')^2} - (E_2/e)^2 \frac{f_2}{(n_2+n_2')^2}\right]. \qquad (6)$$

Dadurch, daß Kossel das den leeren Platz in der gegebenen Elektronenanordnung ausfüllende Elektron einer der weiter vom Kern entfernten Anordnungen entnimmt, verknüpft er die verschiedenen Röntgenspektralserien miteinander. Zur gleichen Verknüpfung gelangt auch Wagner, indem er die Erregungsfrequenzen der einzelnen Serien mit den Emissionsfrequenzen der stärksten Linien dieser und der weicheren Serien vergleicht, ohne dabei das Bohrsche Atommodell heranzuziehen[1]). Setzen wir die Summe $(n+n')$ für das positive (erste) Glied des Frequenzausdrucks (vgl. Gleichung 6) der K-Serie nach Sommerfeld[2]) gleich 1, also einer und nur einer Kreisbahn entsprechend, so schreiben wir dies nach Kossel dem innersten, den Atomkern umgebenden Elektronensystem zu. Setzen wir $(n+n')$ für das positive Glied des Frequenzausdrucks der L-Serie gleich 2, so bezieht sich dies nach Kossel auf die zweite, vom Kern aus gerechnete Elektronenanordnung, im Falle der M-Serie gleich 3, so würde dies für die dritte Elektronenanordnung gelten; im Falle der hypothetischen N-Serie gleich 4, d. h. für die vierte Anordnung usw. Die α_1-Linie der K-Serie entspricht dann dem Übertritt von II (2,0) zu I (1,0), die α_2-Linie der gleichen Serie von II (1,1) zu I (1,0); die β_1-Linie von III (3,0) zu I (1,0), begleitet von noch nicht abgetrennten, nach Rot hin liegenden Trabanten III (2,1) bzw. III (1,2) zu I (1,0); die β_2-Linie[3]) entspricht IV $(4,0) \rightarrow$ I (1,0) und wird von nach Rot hin zu erwartenden, schwer abtrennbaren Trabanten begleitet. (Die eingeklammerten Zahlen bedeuten die entsprechenden Quantenzahlen n und n'.) Die große Anzahl der verschiedenen zur L-Serie gehörenden Linien scheint auch von der Sommerfeldschen Theorie in ihrer bisherigen Gestalt nicht bewältigt zu werden. Immerhin können die stärkeren Linien im Sinne dieser Theorie eingeordnet werden; die von Wagner[4]) angeführte Zuordnung wird durch das gesamte

1) C. Schaefer, diese Zeitschr. **14**, 1118, 1913.
2) N. Bohr, Phil. Mag. (6) **27**, 512, 1914.
3) R. A. Millikan, diese Zeitschr. **14**, 810, 1913.
4) Vgl. Fig. 1, S. 480 bei A. Sommerfeld, a. a. O.
5) Auch die Wellenlängen der Röntgenspektrometrie hängen vom Wert für e ab (und zwar von $e^{1/3}$), da diese Größe die Loschmidtsche Zahl bestimmt.

1) E. Wagner, Münchn. Ber., Math.-nat. Kl. 1914, S. 329; Ann. d. Phys. (4) **46**, 868, 1915.
2) a. a. O. S. 490ff.
3) Diese Bezeichnung wenden die in Lund ausgeführten Arbeiten an; Wagner u. a. bezeichnen sie als γ-Linie, was zweifellos durch die Sommerfeldsche Theorie gerechtfertigt erscheint.
4) E. Wagner, Münchn. Ber., Math.-nat. Kl. 1916, S. 37.

Tabelle II.

Element	L-Serie			
	$\nu_{\beta_1}+\nu_{\beta_2}$	$\nu_{\alpha_2}+\nu_{\gamma_1}$	$\nu_{\beta_4}+\nu_{\beta_5}$	$\nu_{\alpha_1}+\nu_{\gamma_2}$
U	2,712 × 10⁸	2,711 × 10⁸	2,718	2,724
Th	2,560	2,561	2,560	2,573
Bi	2,101	2,101	2,107	2,108
Pb	2,035	2,030	2,042	2,039
Tl	1,982	1,980	1,986	1,987
Hg	1,913	1,915	—	1,922
Au	1,864	1,864	1,873	1,871
Pt	1,801	1,799	1,809	1,806
Ir	1,750	1,747	1,758	1,752
Os	1,695	1,696	—	1,701
W	1,586	1,590	—	1,595
Ta	1,535	1,534	—	1,538
Cp	1,435	1,432	—	1,436
Ad	1,386	1,383	1,390	1,387
Er	1,291	1,289	—	1,292
Ho	1,246	1,246	—	1,249
Dy	1,201	1,202	—	1,205
Tb	1,158	1,157	1,163	1:160
Gd	1,115	1,113	—	1,116
Eu	1,074	1,071	—	1,073
Sa	1,031	1,032	—	1,034
Nd	0,953	0,954	—	0,956
Pr	0,915	0,915	—	0,917
Ce	0,876	0,876	0,878	0,878
La	0,840	0,840	—	0,840
Ba	0,805	0,804	—	0,805
Cs	0,770	0,770	—	0,771
I	0,704	0,704	—	0,705
Te	0,672	0,673	—	0,674
Sb	0,641	0,641	—	0,642
Sn	0,611	0,611	—	0,612
In	0,582	0,581	—	0,582
Cd	0,552	0,553	—	0,554
Ag	0,525	0,525	—	0,526
Pd	0,497	0,497	—	0,497

Material der umfassenden Frimanschen Arbeit gestützt, da die Summe der Schwingungszahlen der Linien β_1 und β_2 genau derjenigen von α_2 und γ_1 gleich ist. Vgl. Tab. II. Somit entspräche

α_1 — III (3,0); II (2,0)
α_2 — III (2,1); II (2,0)
β_1 — III (2,1); II (1,1)
β_3 — IV (4,0); II (2,0)
γ_1 — IV (3,1); II (1,1);

die eben angeführte Beziehung wäre durch die in die Versuchsfehler fallende Abweichung des Energiewertes für IV (3,1) von IV (4,0) bedingt. Für β_3 wären noch zwei nicht abgetrennte Trabanten IV (3,1) und (2,2) zu erwarten; für γ_1 auch noch zwei: IV (2,2) und (1,3); die Linie β_4 entspräche dem Übergang von III (1,2) zu II (1,1). Weniger genau kann die Summe der Schwingungszahlen von β_4 und β_5 derjenigen von α_1 und γ_1 gleichgesetzt werden (vgl. Tab. II). Diese Beziehung veranlaßt die Linie β_5 als dem Übergang von V (5,0) zu II (2,0) entsprechend aufzufassen (γ_3 entspräche dann V (4,1) → II [1,1]); hieraus folgt auch die angenäherte Gleichheit der Linien V (5,0); III (3,0) und IV (2,2); III (1,2) in der *M*-Serie (wohl die ε-Linie bei Siegbahn[1]). In der *M*-Serie entspräche die α-Linie dem Übergang von IV (4,0) zu III (3,0), begleitet von dem bereits bemerkten Trabanten α′ (nach Rot hin): IV (3,1); III (3,0); die β-Linie ginge auf IV (3,1); III (2,1) zurück, doch ist ihr Begleiter IV (2,2); III (1,2) noch nicht festgestellt worden.

3. Während hier die Sommerfeldsche Theorie der mehrfachen Spektralserienlinien eine schöne Anwendung findet, versagt die Kosselsche Verknüpfung der einzelnen Serien miteinander, wenngleich sie angenähert gilt. So ist zwar die dem Linienpaar (2,0; 1,1) entsprechende Schwingungsdifferenz $\alpha_1 - \alpha_2$ der *K*-Serie innerhalb der Versuchsfehler der analogen Schwingungsdifferenz $\beta_1 - \alpha_2$ der *L*-Serie gleich. Das gleiche gilt angenähert für die dem Linienpaar (3,0; 2,1) entsprechenden Schwingungsdifferenzen $\alpha_1 - \alpha_2$ der *L*-Serie und $\beta - \alpha'$ der *M*-Serie (übrigens ist dieser auch die Differenz $\delta_2 - \gamma_2$ gleich). Berechnet man aber mit Hilfe von

1) M. Siegbahn, Verh. d. D. Phys. Ges. 18, 278, 1916.

Gleichung (2) aus diesen Schwingungsdifferenzen $\Delta\nu$ die zugehörigen $(E\,e)$-Werte (und damit auch deren Abweichungen Δ von der Kernladung Z des betreffenden Atoms) und setzt diese Werte in die mit Gl. (2) verknüpften Gl. (1) oder in Gl. (6) ein, so treten Schwierigkeiten auf[1]).

Für das Duplett (2,0; 1,1) der L-Serie beträgt Δ_{II} durchschnittlich etwa 3,6 innerhalb des ganzen Bereiches von $Z = 41$ (Nb) bis $Z = 92$ (U), vorausgesetzt, daß die genaue Gleichung (2) zur Berechnung benutzt wird; die von Sommerfeld[2]) mitgeteilte Annäherung genügt bei den höheren Z-Werten nicht mehr und ergibt stetig abnehmende Δ_{II}-Werte bis 1,6 bei Uran. Die betreffenden Daten reichen in der K-Serie von $Z = 19$ (K) bis $Z = 60$ (Nd)[3]) und stimmen mit Obigem Δ_{II} innerhalb der hier mehr ins Gewicht fallenden Versuchsfehler überein (wenngleich innerhalb des noch am genauesten ausgemessenen Gebiets von $Z = 19$ (K) bis $Z = 32$ (Ge) Δ_{II} im Durchschnitt gleich 3,0 gefunden wird). Für das Duplett (3,0; 2,1) berechnet sich der entsprechende Δ_{III}-Wert zu i. M. 14 innerhalb der L-Serie; innerhalb der M-Serie stört die noch nicht gelungene Ausmessung des Abstandes von α' von α, so daß die Verwendung von α die Δ_{III}-Werte zu klein ausfallen läßt, doch weichen sie nicht viel von obigen, der L-Serie entlehnten Δ_{III}-Werten ab. Setzt man nun diese so gewonnenen $(E\,e)$-Werte in Gleichung (6) ein, so ergibt sich folgendes. Die Benutzung von $(Z - 3{,}6)$ anstatt von $(E\,e)$ im ersten positiven Glied der α_1-Linie der L-Serie ergibt für $(E\,e)$ des zweiten negativen Gliedes des Frequenzausdrucks an Stelle von etwa $(Z - 14)$ den ungefähr dreifachen Z-Wert! Verwendet man $(Z - 3{,}6)$ im negativen Term des Frequenzausdrucks der α_1-Linie der K-Serie zur Berechnung des $(E\,e)$-Wertes des positiven Termes, so folgt hierfür i. D. $(Z - 1{,}6)$. Doch erweist sich so ein Wert für das positive Glied zur Berechnung der β_1- und β_2-Linien dieser Serie als unbrauchbar, da dann Ee im zweiten negativen Gliede den Wert von Z erreicht oder auch überschreitet, anstatt diesen mindestens um 14 zu unterschreiten.

Daß die Kosselschen Additionssätze nicht genau gelten, zeigt sich auch darin, daß die Schwingungsdifferenz der Linien $\beta_1 - \alpha_1$ der K-Serie nicht der Schwingungszahl der α_1-Linie der L-Serie gleich ist, vielmehr geringer ausfällt. Vielleicht gleicht sie eher der Schwingungszahl der l-Linie, sie könnte aber auch zwischen diesen zwei Werten liegen; erst die genaue Ausmessung der K-Seriellinien der seltenen Erden und von Elementen mit noch größerem Z könnte dies entscheiden. Dagegen scheint die Schwingungsdifferenz der Linien $\beta_2 - \alpha_1$ der K-Serie der Schwingungszahl von β_2 der L-Serie gleich zu kommen, soweit aus den wenigen ausgeglichenen Werten der β_2-Linie der K-Serie geschlossen werden kann. Auch die Schwingungsdifferenz $\beta_2 - \alpha_1$ der L-Serie fällt kleiner als die Schwingungszahl der α-Linie der M-Serie aus; man hätte eine Schwingungszahl, welche zwischen den Werten von α_1 und l der L-Serie liegt, zum beobachteten α_1-Wert der M-Serie hinzuzufügen, um ν_{β_2} der L-Serie zu erhalten.

Die aus den Schwingungsdifferenzen der Paare nach Sommerfeld ermittelten $(E\,e)$-Werte der positiven ersten Terme des Frequenzausdrucks (6) stimmen auch nicht mit den direkt erhaltenen, auf der Messung der Erregungsfrequenz oder Grenzfrequenz der Serie beruhenden Werten. Die Erregungsfrequenzen ergeben sich entweder aus der geringsten, zur Erzeugung der charakteristischen Strahlung gerade noch erforderlichen Energie primärer Elektronen oder aus der größten, zur Hervorrufung dieser Strahlung gerade noch genügenden Wellenlänge. Die älteren Messungen der Mindestgeschwindigkeiten von Whiddington[1]) scheinen nicht genügend genau zu sein, sie ergeben dabei geringe negative Werte für die betreffenden $\Delta = Z - (E\,e)$ der K-Serie; dagegen berechnet sich aus dem jüngst von Webster[2]) genau ermittelten Mindestpotential der K-Serie bei Rhodium Δ_I gleich 4,0. Hiermit steht in schöner Übereinstimmung der Mittelwert der Δ_I-Werte, welche aus den von Wagner[3]) gemessenen Wellenlängen der Grenze der selektiven Absorption folgen; nämlich i. D. 3,9 für 14 Elemente von Fe bis Nd reichend (K-Serie), doch scheint Δ_I mit fallender Atomnummer eine Verminderung zu erleiden. In der L-Serie sind bisher allein 2 Elemente von Wagner untersucht worden — Δ_{II} ergibt sich hier, bei Pt und Au, gleich i. D. 20, während aus der Schwingungsdifferenz des Paares (2,0; 1,1) Δ_{II} gleich 3,6 erhalten wurde!

4. Diese mangelhafte Kenntnis der $(E\,e)$-Werte der einzelnen Terme der Frequenzausdrücke hindert eine genaue Berechnung der Frequenzen durchzuführen, welche beim Sprung der einzelnen Elektronenanordnungen des zerfallenden Radioelements von der für das ur-

1) α wurde gleich $1{,}33 \times 10^{-3}$ gesetzt.
2) a. a. O. S. 410 u. S. 499.
3) Nach den in Lund ausgeführten Untersuchungen: S. Malmer, Diss. Lund 1915; M. Siegbahn und E. Friman, Ann. d. Phys. (4) **49**, 611, 1916; M. Siegbahn und W. Stenström, diese Zeitschr. **17**, 48, 318, 1916.

1) R. Whiddington, Proc. Roy. Soc. **85**, 323, 1911.
2) D. L. Webster, Proc. Nat. Ac. U. S. A. **2**, 93, 1916.
3) a. a. O. S. 33 u. 37.

sprüngliche Element charakteristischen Größe der Bahnachsen zu derjenigen des neu entstandenen ausgesandt werden. In Analogie mit Gleichung (6) kann man schreiben

$$\nu_r = q \frac{N}{(n+n')^2}\{(E'/e)^2 f' - (E/e)^2 f\}; \quad (7)$$

q bedeutet hier die Anzahl der Elektronen in der überspringenden Anordnung; die gestrichelten Werte von (E/e) und f beziehen sich auf das neu entstehende, die ungestrichelten auf das ursprüngliche Atom. Da $(n+n')$ in beiden Gliedern des Frequenzausdrucks gleich ist, bedingt der Wert dieser Summe auch die Anzahl der Linien, da nach Sommerfeld gewisse Quantenzahlenkombinationen nicht möglich sind; es kommen vielmehr hier allein vor (1,0); (2,0) und (1,1); (3,0), (2,1) und (1,2) usw., d. h. n und n' fallen in beiden Termen gleich aus.

In (7) wurde vorausgesetzt, daß ein einziges Lichtquant bei so einem Sprung emittiert wird; daher geht auch die Elektronenanzahl q in diese Gleichung ein. Bei Elektronenringen gestattet der Unterschied der wirkenden Ladung E gegenüber der positiven Kernladung Ze Schlüsse in bezug auf q zu ziehen[1]). Die oben dargelegten Schwierigkeiten hinsichtlich der E/e-Werte der einzelnen Elektronenanordnungen gestatten jedoch nicht diesen Weg zu beschreiten, daher sind andere Gesichtspunkte heranzuziehen. Die Periodizität der Eigenschaften der Elemente beim Übergang von Horizontale zu Horizontale im periodischen System legt eine Zunahme der Zahl der erhalten bleibenden, inneren Elektronensysteme um Eins nahe (bei der Erreichung der Vertikalen der Edelgase). Für die peripherischen Elektronen ergeben valenzchemische Gesichtspunkte nach Kossel[2]) eine der positiven Valenz des betreffenden Elements gleiche Elektronenanzahl. Betrachten wir die Edelgasreihe, ohne uns, wie Kossel, auf die drei ersten Glieder zu beschränken, so weist Helium zwei Elektronen auf, Neon eine Anordnung mit 2 und eine mit 8 Elektronen, Argon $2+8+8$, Krypton $2+8+8+18$, Xenon $2+8+8+18+18$ und Niton (Radiumemanation) $2+8+8+18+18+32$ Elektronen auf. Dabei gelten die Edelgase dank ihrer völligen chemischen Trägheit, wie das Kossel in seiner oben erwähnten Arbeit über Molekelnbildung hervorhebt, als Gebilde, deren äußerster Ring seine geschlossene Gestalt unverändert beibehält. Auch dienen diese Elemente den benachbarten mit ihren erhalten bleibenden Elektronensystemen als Vorbild, indem diese bei der Bildung von heteropolaren Verbindungen Anordnungen von gleicher Verteilungsart und Anzahl der Elektronen entstehen lassen, wie sie die Edelgase aufweisen. Besteht diese Vorstellung zu Recht, so unterscheiden sich die durch Betätigung der ganzen positiven Valenz entstandenen Verbindungen von den freien Atomen und den durch Betätigung der negativen Valenz gebildeten Verbindungen des gleichen Elements durch den Verlust der Valenzelektronen. Folglich könnten Röntgenlinien, welche durch den Übertritt eines der Valenzelektronen in eine der inneren Elektronenanordnungen gebildet werden, im ersteren Fall überhaupt nicht entstehen; höchstens sekundär infolge der Bestrahlung, falls diese eine Reduktion bewirkt. In der Tat haben Siegbahn u. Stenström[1]) beim als Chlorid untersuchten *Na* nur die α_1-Linie beobachten können, während die β-Linie, welche durch Übertritt eines Elektrons der III. Anordnung, somit in der Reihe von *Na* bis *Cl* eines Valenzelektrons in die I. entsteht, gar nicht beobachtet wurde, was mit dem Kosselschen Bilde übereinstimmt, da das heteropolar verbundene *Na* sein einziges Valenzelektron an das *Cl* abgegeben hat, somit gar keine III. Anordnung besitzt. Bei den im metallischen Zustande untersuchten, somit als einatomige Molekeln die Valenzelektronen enthaltenden Elementen *Mg*, *Al* und *Si* wurde auch die β_1-Linie festgestellt; es wäre nun sehr wünschenswert, diese Elemente als entsprechende Verbindungen zu untersuchen, sie hätten dann im Sinne der Kosselschen Vorstellung keine β_1-Linie aufzuweisen. Die elektronegativen Elemente dieser Horizontalen, *P*, *S* und *Cl*, weisen zwar sowohl als freies Atom, als heteropolar verbunden die III. Elektronenanordnung auf, wenn auch in diesen zwei Fällen eine verschiedene Elektronenzahl in dieser III. Anordnung; dementsprechend müßte die Elektronenabtrennungsarbeit aus dieser peripherischen Anordnung etwas verschieden für diese zwei Fälle ausfallen, und folglich auch die beim Übertritt eines peripherischen Elektrons in eine der inneren Elektronensysteme ausgesandte Röntgenlinie. Meßbar wäre dieser Unterschied wohl sicher bei mehr als 10^{-7} cm betragenden Wellenlängen; doch haben die genannten Forscher bereits bei *P* und *S* eine Trabantin der β_1-Linie beobachtet (5,029 bzw. $5{,}853 \times 10^{-8}$ cm), welche bei abnehmender Atomnummer auch eine größere Abweichung von der Hauptlinie aufweist. Die von *Ti* bis *Mg* gemessenen neuen Linien α_3 und α_4 könnten wohl weniger in diesem Sinne gedeutet werden, als vielmehr durch den Verlust von mehr als einem Elektron

1) Vgl. N. Bohr, Phil. Mag. (6) **26**, 20, 21, 482, 1913; G. N. Watson, ib. **31**, 111, 1916.

2) W. Kossel, Ann. d. Phys. (4) **49**, 229, 1916.

1) M. Siegbahn u. W.-Stenström, diese Zeitschr. **17**, 319, 1916.

der inneren Anordnungen erklärt werden, wodurch ja die Werte der entsprechenden (E/e) hier prozentuell stärker beeinflußt werden.

Nimmt man somit nach Kossel für die innerste Elektronenanordnung allein zwei Elektronen an, so beträgt Δ_1 nur 0,25, während oben bedeutend größere Werte gefolgert wurden. Die von der Elektronenanzahl q stark abhängende Sprungfrequenz ν_s (vgl. Gleichung 7) wird durch diese Ungewißheit stark beeinflußt. Ist für die innerste Anordnung $q = 2$ und $(n + n') = 1$ und für die zweite, 8 bzw. 2, so fallen die betreffenden Wellenlängen für RaB $(Z = 82)$ in den Bereich von 2,5 bis $2{,}9 \times 10^{-8}$ cm, je nach der Wahl der Δ-Werte; für die höheren Elektronenanordnungen folgen bedeutend größere Wellenlängen. Bei RaB sind nun nicht untergebrachte Röntgenlinien allein zwischen 0,85 und $1{,}29 \times 10^{-8}$ cm (vgl. Tab. I), sowie zwischen 1,7 und $2{,}1 \times 10^{-8}$ cm[1]) bekannt; sollten einzelne von ihnen auf die erörterte Neuordnung der innersten Elektronensysteme zurückgehen, so müßte mindestens $q_1 > 2$, und somit $\Delta_1 > 0{,}25$, was mit den früheren Berechnungen übereinstimmen würde. Auf jeden Fall könnten sich unter den ganz weichen γ-Strahlen Linien finden, welche auf die diskutierten Sprünge der mittleren Elektronenanordnungen zurückgehen.

Die α_1-Linien der K-Serie der verschiedenen Elemente können gut durch den Frequenzausdruck (6) dargestellt werden, falls $(E_1/e) = Z - 1{,}6$ und $(E_2/e) = Z - 3{,}6$ gesetzt werden; die anderen Linien können dann bei bekannten γ-Serienlinien mit Hilfe der Kosselschen Additionssätze wenigstens angenähert erhalten werden. Berechnet man auf diese Weise die künstlich noch nicht erzeugten K-Serienlinien für Pb und Bi, so zeigt sich gute Übereinstimmung für die α-Linien mit der Doppellinie A bei 1,59 und $1{,}69 \times 10^{-9}$ cm der harten γ-Strahlen von RaB und RaC[2]), da die Extrapolation 1,63 bzw. $1{,}59 \times 10^{-9}$ für die α_1-Linien und 1,68 bzw. $1{,}64 \times 10^{-9}$ für die α_2-Linien ergibt; die berechneten β-Linien liegen auch in der Nähe der beobachteten γ-Strahlenlinie $1{,}37 \times 10^{-9}$ cm.

Immerhin bleibt eine Reihe harter γ-Strahlenlinien nach, über deren Ursprung fürs erste nichts Sicheres ausgesagt werden kann; ob eine Umwandlung aus β-Strahlen vorliegt, möge dahingestellt bleiben.

1) Vgl. E. Rutherford u. E. N. da C. Andrade, l. c., **27**, 859.
2) E. Rutherford u. E. N. da C. Andrade, l. c. **28**, 269.

Z. Zt. Bad Rappenau (Baden), den 22. August 1916.

(Eingegangen 27. August 1916.)

Über die Abhängigkeit der Sekundärstrahlungs-Emissionskoeffizienten von der Wellenlänge der erregenden Röntgenstrahlen.

Von R. Glocker.

In verschiedenen Arbeiten haben Barkla und Sadler die grundlegenden Tatsachen über den Emissionsvorgang der für jedes Element charakteristischen Sekundärstrahlung festgestellt. Da aber zur Zeit der Versuche die Wellenlänge als exaktes Maß der Härte noch unbekannt war, so besitzen die von ihnen aus den Versuchsergebnissen gezogenen Schlüsse nur qualitativen Charakter. Die charakteristische Sekundärstrahlung eines Elementes wird nur von solchen Röntgenstrahlen erregt, deren Absorptionskoeffizient (in Aluminium gemessen) kleiner ist als der der betreffenden Sekundärstrahlen; bei Anregung durch homogene Primärstrahlen verschiedener Härte nimmt die Intensität der erregten Sekundärstrahlung um so mehr ab, je härter die Primärstrahlung wird.

Eine quantitative Behandlung des Vorgangs unter Benützung der nunmehr bekannten Zahlenwerte der Wellenlängen wird sich mit folgenden 3 Punkten befassen müssen:

1. Verhältnis der Härtegrade der Sekundärstrahlung und der weichsten eben noch deren Erregung verursachenden Primärstrahlung (Stokesscher Sprung).
2. Abhängigkeit der Sekundärstrahlungsemission eines einzelnen Elementes vom Härtegrad der erregenden Strahlung.
3. Vergleich der Größe der maximalen Sekundärstrahlungsemission verschiedener Elemente.

1. Der erste Punkt hat durch die Spektraluntersuchungeu von Wagner[1]) bereits seine Erledigung gefunden; ist λ_0 die Wellenlänge der Sekundärstrahlung eines Elementes, so kann dieselbe von solchen Primärstrahlungen angeregt werden, deren Wellenlänge λ der Bedingung genügen

$$\lambda \leqq c \cdot \lambda_0.$$

Die Konstante c hat für alle Sekundärstrahlungen der K-Serie nahezu den gleichen Wert 1,14, wenn für λ_0 die Wellenlänge der α-Linie eingesetzt wird; der genaue Wert von c beträgt für die Elementengruppe Fe bis Cu 1,11 und steigt mit wachsender Atomzahl auf 1,18 (I bis Er).

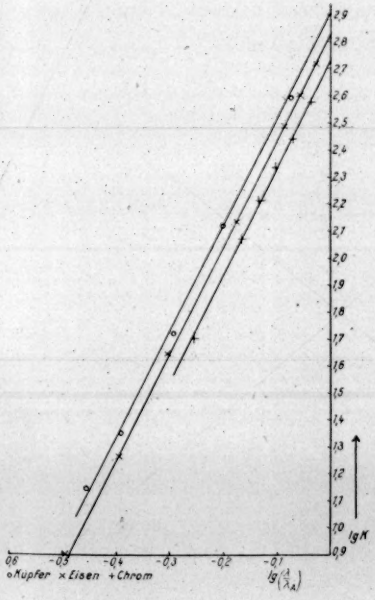
2. Über das Emissionsvermögen der Elemente für charakteristische Sekundärstrahlung der K-Serie gibt es Meßreihen von Sadler[2]),

1) Ann. d. Phys. **46**, 868, 1915; Bayr. Akad.-Ber. S. 31, 1916.
2) Phil. Mag. **18**, 126, 1909; **22**, 454, 1911.

welche für die Elemente *Cr, Fe, Co, Ni, Cu* Zahlenwerte des Emissionskoeffizienten K enthalten; K ist definiert durch die Gleichung

$$dI = K \cdot J \cdot dx,$$

wobei dI denjenigen Teil der Primärintensität I angibt, welcher beim Durchgang der Primärstrahlung durch die Schichtdicke dx des betreffenden Elementes in Sekundärstrahlungsintensität verwandelt wird. Die angegebenen Zahlenwerte von K sind bereits korrigiert in



bezug auf den Absorptionsverlust, welchen die zum Meßinstrument gelangenden Sekundärstrahlen innerhalb der strahlenden Schicht erleiden; K ist somit ein Maß für die gesamte entstehende Sekundärstrahlung, während die Versuchswerte Whiddingtons[1]) nur die aus der Oberfläche des Elementes austretende Sekundärintensität angeben.

Als erregende Primärstrahlungen wurden von Sadler die Eigenstrahlungen der Elemente *Fe* bis *Sn* benützt. Nachdem nunmehr deren Wellenlängen λ genau bestimmt worden sind, ist es möglich auf graphischem Wege eine einfache Beziehung zwischen K und λ festzustellen: Trägt man in ein rechtwinkliges Koordinatensystem als Ordinaten die Logarithmen der Emissionskoeffizienten K eines Elementes, z. B. *Fe* (Tabelle I) ein, während als Abszisse die Größe $\lg\left(\frac{\lambda}{\lambda_A}\right)$ dient — λ ist die mittlere Wellenlänge des α-Dubletts[1]), λ_A die der Absorptionsbandkante von *Fe* — so ergibt sich die Beziehung

$$\lg K = b \lg\left(\frac{\lambda}{\lambda_A}\right) + a \qquad (1)$$

wobei b mit großer Genauigkeit $= 4{,}0$ ist (siehe Figur).

Tabelle I.

Eisen $\lambda_A = 1{,}759 \cdot 10^{-8}$ cm.

Erregende Primärstrahlung			Emissionskoeffizient	
Eigenstrahlung von	Wellenlänge $\lambda \cdot 10^8$	$\lg \lambda\lambda_A$	K	$\lg K$
Ni	1,65$_5$	— 0,026	526	2,721
Cu	1,54	— 0,057	403	2,605
Zn	1,43$_5$	— 0,088	307	2,487
As	1,17	— 0,176	137	2,137
Se[2])	1,11	— 0,201	96,0	1,982
Sr	0,87$_4$	— 0,304	43,9	1,643
Mo	0,71	— 0,393	18,3	1,263
Ag	0,56$_5$	— 0,494	7,95	0,900
Sn	0,49	— 0,557	4,74	0,676

Wendet man dasselbe Verfahren auf die Elemente *Cr* und *Cu* an (Tabelle II und III), so lassen sich durch die Versuchspunkte zwanglos gerade Linien ziehen, welche zu der *Fe*-Linie parallel sind. Bei *Co* und *Ni*, deren Linien mit Rücksicht auf die Übersichtlichkeit in die Figur nicht eingezeichnet sind, wird dieses Resultat bestätigt: Der Koeffizient b hat überall den Wert 4.

Tabelle II.

Chrom $\lambda_A = 2{,}097 \cdot 10^{-8}$ cm.

Eigenstrahlung von	$\lambda \cdot 10^8$	$\lg(\lambda\lambda_A)$	K	$\lg K$
Fe	1,93	— 0,036	378	2,577
Co	1,78	— 0,070	275	2,439
Ni	1,65$_5$	— 0,103	216	2,335
Cu	1,54	— 0,134	162	2,210
Zn	1,43$_5$	— 0,165	117,5	2,070
As	1,17	— 0,253	50,5	1,703
Se	1,11	— 0,278	36,0	1,556

1) Proc. Roy. Soc. **85**, 323, 1911. (Diese Arbeit kommt hier nicht weiter in Betracht, da als Härtemaß für die Primärstrahlung die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen diente.)

1) Eine Berücksichtigung der Tatsache, daß in den erregenden Strahlungen jeweils noch die um etwa 10 Proz. kürzeren Wellenlängen des β-Dubletts vertreten sind, führt zu kaum merklichen Änderungen der Figur (λ wurde hierbei berechnet aus den Wellenlängen beider Dubletts unter Berücksichtigung des Intensitätsgewichtes); auch die Verhältnisse der Konstanten A in Tab. IV erleiden hierdurch keine Änderung.

2) Die der *Se*-Strahlung entsprechenden Versuchspunkte sind in die Figur nicht eingezeichnet, da sie bei allen 5 Elementen ziemlich rechts von der betr. Geraden liegen; Verunreinigung des benützten Selenpräparates?

Tabelle III.

Kupfer $\lambda_A = 1{,}386 \cdot 10^{-8}$ cm.

Eigenstrahlung von	$\lambda \cdot 10^8$	$\lg(\lambda\,\lambda_A)$	K	$\lg K$
Ag	1,17	— 0,073	390	2,591
Se	1,11	— 0,098	267	2,427
Sr	0,874	— 0,200	131	2,117
Mo	0,71	— 0,290	52	1,716
Ag	0,505	— 0,390	22,4	1,350
Sn	0,49	— 0,453	14,0	1,146

Das Abhängigkeitsgesetz[1]) der Emissionskoeffizienten K von der erregenden Wellenlänge λ lautet somit für die Elementengruppe *Cr* bis *Cu*

$$K = A\left(\frac{\lambda}{\lambda_A}\right)^4, \qquad (2)$$

wobei A eine für das betreffende Element charakteristische Konstante ist; A stellt offenbar den maximalen Wert K_A dar, den der Emissionskoeffizient jedes Elementes überhaupt annehmen kann, nämlich dann, wenn die anregende Wellenlänge λ genau gleich der der Absorptionsbandkante λ_A ist. Die Gleichung (2) läßt sich somit in folgender einfacher Form schreiben:

$$\frac{K}{K_A} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_A}\right)^4. \qquad (3)$$

Die Analogie mit der von Kossel[2]) und Siegbahn[3]) gefundenen Wellenlängenabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten, bei welcher der Exponent nahezu im ganzen Gebiet der K-Serie den universellen Wert 2,7 aufweist, berechtigt zu der Annahme, daß die Gültigkeit der Emissionsgleichung (3) nicht auf die Elementengruppe Chrom bis Kupfer beschränkt ist; weiteres experimentelles Material zur Prüfung derselben, besonders im Gebiet der kurzen Wellenlängen, ist leider nicht vorhanden.

3. Um die Größe der maximalen Sekundärstrahlungsemission K_A bei verschiedenen Elementen miteinander vergleichen zu können, müssen die Koeffizienten A (Gl. 2) in Beziehung gesetzt werden zu sonstigen für das betreffende Element charakteristischen Konstanten. Ist Z die Ordnungszahl des Elementes im natürlichen System und ϱ seine Dichte[1]), so sind, wie Tabelle IV zeigt, die Konstantenverhältnisse je zweier Elemente direkt gleich dem Verhältnis der Produkte $\varrho \cdot Z$. Die erste Spalte der Tabelle IV enthält die graphisch gefundenen Werte $\frac{A_1}{A_2}$; in einer genauen Zeichnung wurde hierzu jeweils der Abstand zweier Geraden in Richtung der Ordinaten gemessen, welcher gleich $\lg\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$ ist. (Gl. 1 und 2).

Tabelle IV.

	$\frac{A_1}{A_2}$ (empirisch)	$\frac{\varrho_1 Z_1}{\varrho_2 Z_2}$	Unterschied in Proz.
$\frac{Fe}{Cr}$	1,275	1,27	+ ½ Proz.
$\frac{Ni}{Cr}$	1,50	1,53	— 2 Proz.
$\frac{Co^*}{Cr}$	1,55	1,48	+ 4½ Proz.
$\frac{Cu^*}{Cr}$	1,55	1,60	— 3 Proz.
$\frac{Cu}{Fe}$	1,22	1,26	— 3 Proz.

*) Die *Co*-Linie fällt in der Zeichnung mit der *Cu*-Linie zusammen.

Für die Berechnung der Konstanten A darf also mit ausreichender Genauigkeit angesetzt werden.

$$A = \text{const.}\ \varrho \cdot Z, \qquad (4)$$

wobei const. einen für alle 5 Elemente gemeinsamen Zahlenfaktor bedeutet; aus den graphisch ermittelten Absolutwerten der Konstanten A ergibt sich für const. der Wert 3,3. Somit folgt aus Gl. (2) und (4) für den auf die Masseneinheit bezogenen Emissionskoeffizienten

$$\frac{K}{\varrho} = 3{,}3 \cdot Z \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda_A}\right)^4 \qquad (5)$$

und

$$K_A = 3{,}3 \cdot \varrho \cdot Z. \qquad (6)$$

Während aus Analogiegründen, wie schon oben hervorgehoben wurde, der Abhängigkeit von der 4. Potenz der Wellenlänge ein umfassender Gültigkeitsbereich zugesprochen werden darf, muß aus Mangel an experimentellen Daten die Frage offen bleiben, ob die Gleichung (4) auch für Elemente außerhalb der Gruppe Chrom bis Kupfer eine brauchbare Darstellung des Koeffizienten der Wellenlängenabhängigkeit zu liefern vermag.

1) Aus der von Sadler (Phil. Mag. **18**, 127, 1909) aufgestellten linearen Gleichung $K = c_1\,\mu + c_2$ (μ Absorptionskoeffizient der Primärstrahlung in Aluminium) einerseits und aus der Kossel-Siegbahnschen Beziehung $\frac{\mu}{\varrho} = A \cdot \lambda^{2{,}9}$ andererseits würde folgen $K = c_3\,\lambda^{2{,}9} + c_2$ an Stelle der obigen Gleichung (2). Eine auf Grund weiterer Messungen, besonders im Gebiet der kurzen Wellenlängen, in einer späteren Arbeit (Phil. Mag. **22**, 456, 1911) gegebene Figur nebst Tabelle zeigt jedoch die Unhaltbarkeit der linearen Beziehung; dieselbe ist, wie man sich auf graphischem Wege leicht überzeugen kann, zu ersetzen durch die Gleichung $\lg K = B \lg \mu + \text{const.}$, wobei B ungefähr gleich $1\frac{1}{3}$ ist; hieraus ergibt sich dann für die Wellenlängenabhängigkeit die Beziehung $K = \text{const.}\ \lambda^{2{,}9 \cdot B}$, welche mit der auf direktem Wege ermittelten Gleichung (2) gut übereinstimmt.

2) Verh. d. Phys. Ges. **20**, 903, 1914.

3) Diese Zeitschr. **15**, 754, 1914.

1) Landolt-Börnstein 1912.

München-Stuttgart im August 1916.

(Eingegangen 24. August 1916.)

Zur Theorie des Zeeman-Effekts der Wasserstofflinien, mit einem Anhang über den Stark-Effekt.

Von A. Sommerfeld.

§ 1. Einleitung.

In einer Annalen-Arbeit[1]), welche die Ergebnisse zweier in der Münchner Akademie veröffentlichter Aufsätze zusammenfaßt und erweitert, habe ich die Keplerschen Ellipsen, die ein Elektron um einen Wasserstoffkern herum beschreibt, nicht nur ihrer Größe und Gestalt, sondern auch ihrer räumlichen Lage nach „gequantelt". Um durch Quantenbedingungen gewisse Lagen der Bahnebene im Raume auszuzeichnen, ist allerdings erforderlich, daß durch irgendwelche physikalische Umstände eine Bezugsrichtung oder Bezugsebene im Raume gegeben ist, gegen welche die Lage der Bahnebene orientiert werden kann. A. a. O. habe ich mich beschränkt auf ein „magnetisches Feld von der Stärke Null", welches durch seine Ebene senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien eine solche Bezugsebene definiert, ohne im übrigen die Bewegung des Elektrons zu beeinflussen. Macht man diese Ebene zur Äquatorebene $\vartheta = \pi/2$ eines räumlichen Polarkoordinatensystems r, ϑ, φ und unterwirft diese Koordinaten dem Quantenansatz

$\int p_\varphi \, d\varphi = n_1 h$, $\int p_\vartheta \, d\vartheta = n_2 h$, $\int p_r \, dr = n' h$,

unter p_φ, p_ϑ, p_r die zu den Koordinaten φ, ϑ, r gehörigen Impulse verstanden, wobei die Integrale über denjenigen Wertebereich der betr. Koordinate zu erstrecken sind, der zur Darstellung aller Phasenpunkte des Systems erforderlich ist, so ergibt sich das folgende bemerkenswerte Resultat: Während Größe und Gestalt der Ellipse dieselben bleiben wie ohne Magnetfeld, wird die Lage im Raum ganzzahlig beschränkt durch die Bedingung

$$\cos \alpha = \frac{n_1}{n_1 + n_2}. \qquad (1)$$

Dabei bedeutet α den Winkel der Bahnebene gegen die Äquatorebene des Koordinatensystems. Die Energie der Bewegung lautet ebenso wie bei Abwesenheit des (als verschwindend angenommenen) Magnetfeldes:

$$W = -\frac{Nh}{(n + n')^2}, \; n = n_1 + n_2. \qquad (2)$$

Das radiale Quantum n' bestimmt mittels der Exzentrizität die Gestalt der Ellipse; das azimutale Quantum n bestimmt die Größe der Ellipse durch Vermittelung der für die Bahnebene berechneten Flächenkonstanten p.

1) Sommerfeld, Ann. d. Phys. **51**, 1, 1916.

Dieses azimutale Quantum n zerlegt sich in die beiden zu den Koordinaten φ und ϑ gehörigen Quanten n_1 und n_2. Das Quantum n_1 steht zu der Flächenkonstanten p_φ für die Äquatorebene in derselben Beziehung, wie das Quantum n zu der Flächenkonstanten p für die Bahnebene:

$$2\pi p = nh; \; 2\pi p_\varphi = n_1 h. \qquad (3)$$

Da $p_\varphi = p \cos \alpha$, folgt durch Division der beiden Gl. (3) unmittelbar die Bestimmungsgleichung (1) für $\cos \alpha$. Gl. (1) zeigt:

Für $n = 1$ gibt es nur zwei Lagen der Bahnebene, entweder senkrecht zur Äquatorebene ($n_1 = 0$, $n_2 = 1$) oder parallel dazu ($n_1 = 1$, $n_2 = 0$).

Für $n = 2$ gibt es vier Lagen, die senkrechte ($n_1 = 0$, $n_2 = 2$), die parallele ($n_1 = 2$, $n_2 = 0$) oder die beiden unter 60° geneigten Lagen ($n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $\cos \alpha = 1/2$, $\alpha = \pm \pi/3$).

Allgemein beträgt bei beliebigem n die Anzahl der quantenhaft ausgezeichneten Lagen $2n$; unter ihnen ist stets die senkrechte und parallele Lage enthalten (vgl. Fig. 1).

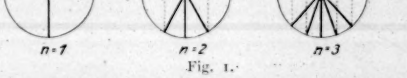


Fig. 1.

Wie ich a. a. O. bemerkt habe, versteht man auf Grund dieses Richtungseffekts nicht nur die qualitative Möglichkeit der scharfen Polarisation der Zeeman-Komponenten, sondern man gelangt auch zu gewissen quantitativen Analogien mit dem normalen Zeemaneffekt, allerdings nicht zu einer vollen Identität. Ich möchte dies im folgenden näher ausführen, da, wie ich höre, Beobachtungen über den Zeemaneffekt bei den Wasserstofflinien vorbereitet werden. Meine Ergebnisse decken sich, wie ich jetzt bei der Korrektur feststellen kann, mit Resultaten, die P. Debye inzwischen in den Göttinger Nachrichten veröffentlicht hat (vgl. auch unten Seite 507).

Bei den obigen Angaben war stillschweigend von dem Einfluß der Relativität abgesehen, welche, wie ich früher gezeigt habe, eine Feinstruktur der Wasserstofflinien bewirkt, insbesondere das bekannte Wasserstoff-Dublett erklärt. Da bei einfachen Linien der normale Zeemaneffekt, bei mehrfachen Linien aber zunächst die komplizierten Zeemaneffekte auftreten, die erst bei hinreichend starken

Magnetfeldern mittels des Paschen-Back-Effekts in das normale Lorentzsche Triplett übergehen, so versprach die relativistische Behandlung des Zeemaneffekts der Wasserstofflinien besonders interessante Resultate. Ich werde daher im folgenden das Problem des Zeemaneffektes auch mit Berücksichtigung der relativistischen Massenveränderlichkeit behandeln. Der Erfolg ist allerdings nicht der erwartete: es ergibt sich nämlich auch hier nur das normale Lorentzsche Triplett, und auch dieses nur in demselben Sinne (nämlich unter Absehung von gewissen überzähligen Komponenten), wie vom Standpunkte der gewöhnlichen Mechanik.

Ich beantworte bei dieser Gelegenheit zugleich eine Frage, die P. Epstein[1]) kürzlich gestellt hat, die Frage nach der kanonischen Form der relativistischen Bewegungsgleichungen mit Magnetfeld. Stellt man sich nämlich auf den Standpunkt, den Schwarzschild und Epstein bei der Behandlung des Starkeffekts mit so großem Erfolge durchgeführt haben, so hat man die Quantenansätze an die Hamilton-Jacobische Form der Bewegungsgleichungen anzuschließen. Die von Jacobi eingeführte Wirkungsfunktion ist nichts anderes als die Summe der von mir benutzten, aber mit unbestimmter oberer Grenze geschriebenen Phasenintegralen, genommen über alle Freiheitsgrade; die Periodizitätsmoduln der Jacobischen Wirkungsfunktion werden auf diese Weise direkt Vielfache des Planckschen Wirkungsquantums. Wegen dieses naturgemäßen und engen Zusammenhangs zwischen Quantentheorie und Hamilton-Jacobischer Mechanik wird man wünschen, auch die Differentialgleichungen des Zeemaneffekts in kanonischer Form zu schreiben. Man gelangt dazu einfach, wenn man statt der gewöhnlichen Zeit die relativistische Eigenzeit einführt.

Auch vom Standpunkte der analytischen Einfachheit empfiehlt sich dieser Weg. Es ist nicht nötig, die Bewegungsgleichungen vollständig auszuintegrieren; man kann vielmehr schon bei den ersten Integralgleichungen Halt machen, da diese bereits die uns interessierende Energiekonstante W liefern. Sodann aber ergibt sich eine bemerkenswerte Vereinfachung, wenn man die Periodizitätsmoduln der Wirkungsfunktion — unsere Quantenzahlen — nach der Methode der komplexen Integration ausrechnet. Da stets die Grenzen der Integration durch die Verzweigungspunkte des Integranden gegeben werden, so handelt es sich bei unseren Phasenintegralen notwendig um „vollständige" Integrale auf geschlossenem Wege, die durch Deformation des Integrationsweges vereinfacht und in den wichtigsten Fällen nach der Residuenmethode direkt ausgewertet werden können.

In einem Anhang wende ich die hier entwickelten Methoden auf den Starkeffekt an, indem ich erstens die Berechnung durch komplexe Integration vereinfache und zweitens die kanonische Form der Bewegungsgleichungen mit Rücksicht auf die relativistische Massenveränderlichkeit entwickle, ohne dieselben übrigens zu integrieren. Auf das Interesse, welches die relativistische Behandlung des Starkeffekts bieten würde, hat bereits P. Epstein[1]) hingewiesen.

§ 2. Zeemaneffekt ohne Relativität.

Es ist seit langem bekannt, daß ein Elektron unter dem gleichzeitigen Einfluß einer Coulombschen Kraft und eines homogenen Magnetfeldes eine Keplerellipse beschreibt, die um die Richtung der magnetischen Kraftlinien eine Präzession ausführt, sofern man die Quadrate der magnetischen Feldstärke vernachlässigen darf. Wir beweisen dieses Ergebnis, welches uns auch als Grundlage für die relativistische Behandlung dienen wird, in Kürze folgendermaßen[2]).

Die Bewegungsgleichungen lauten, wenn man die Richtung des homogenen Magnetfeldes zur z-Achse macht und den Kern als unbeweglich (Masse ∞) ansieht:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\dot{x}) &= -\frac{e^2}{r^3}x - \frac{e}{c}H\dot{y}, \\ \frac{d}{dt}(m\dot{y}) &= -\frac{e^2}{r^3}y + \frac{e}{c}H\dot{x}, \\ \frac{d}{dt}(m\dot{z}) &= -\frac{e^2}{r^3}z. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Neben den rechtwinkligen Koordinaten benutzen wir das schon in der Einleitung genannte Polarkoordinatensytem r, ϑ, φ, indem wir setzen

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta. \quad (2)$$

Das zur Koordinate φ gehörige Impulsmoment p_φ ist

$$p_\varphi = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = mr^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}. \quad (3)$$

Dasselbe ist nicht konstant; vielmehr folgt aus (1)

$$\frac{dp_\varphi}{dt} = \frac{mf}{2}\frac{d}{dt}(x^2+y^2) = \frac{mf}{2}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\vartheta). \quad (4)$$

1) P. Epstein, Ann. d. Phys. **51**, 198, 1916.

1) Ann. d. Phys. **50**, 500 und 507, 1916.

2) In Übereinstimmung mit P. Epstein, Ann. d. Phys. **51**, 198, 1916.

Hierbei ist die für den Zeemaneffekt charakteristische Abkürzung eingeführt:

$$f = \frac{e}{m}\frac{H}{c}. \tag{5}$$

Schreiben wir für (4)

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\sin^2\vartheta\left(\varphi - \frac{f}{2}\right)\right) = 0, \tag{6}$$

so liegt es nahe, einen Hilfswinkel χ einzuführen durch

$$\dot{\chi} = \dot{\varphi} - \frac{f}{2}, \quad \varphi = \chi + \frac{f}{2}t. \tag{7}$$

Die Integration von (6) liefert dann

$$mr^2\sin^2\vartheta\,\dot{\chi} = p_\chi, \tag{8}$$

wo p_χ eine Konstante ist.

Wir zeigen, daß auch die ursprünglichen Bewegungsgleichungen vereinfacht werden, wenn wir ein System $\xi\eta\zeta$ einführen, welches gegen das System xyz mit der Winkelgeschwindigkeit $f/2$ um die z-Achse gedreht wird, indem wir setzen: $\xi = r\sin\vartheta\cos\chi$, $\eta = r\sin\vartheta\sin\chi$, $\zeta = r\cos\vartheta$. (9) Wegen (2) und (7) ergibt sich

$$x = \xi\cos\frac{f}{2}t - \eta\sin\frac{f}{2}t$$

$$y = \xi\sin\frac{f}{2}t + \eta\cos\frac{f}{2}t$$

$$z = \zeta.$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} x + fy &= (\dot{\xi} + \frac{f}{2}\eta)\cos\frac{f}{2}t - (\dot{\eta} - \frac{f}{2}\xi)\sin\frac{f}{2}t \\ y - fx &= (\dot{\xi} + \frac{f}{2}\eta)\sin\frac{f}{2}t + (\dot{\eta} - \frac{f}{2}\xi)\cos\frac{f}{2}t \end{aligned}\right| \tag{10}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x + fy) &= (\ddot{\xi} + \frac{f^2}{4}\xi)\cos\frac{f}{2}t - (\ddot{\eta} + \frac{f^2}{4}\eta)\sin\frac{f}{2}t, \\ \frac{d}{dt}(y - fx) &= (\ddot{\xi} + \frac{f^2}{4}\xi)\sin\frac{f}{2}t + (\ddot{\eta} + \frac{f^2}{4}\eta)\cos\frac{f}{2}t. \end{aligned}\right| \tag{10a}$$

Die Gl. (1) gehen daher über in

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi} &= -\frac{e^2\xi}{mr^3} - \frac{f^2}{4}\xi, \\ \ddot{\eta} &= -\frac{e^2\eta}{mr^3} - \frac{f^2}{4}\eta, \\ \ddot{\zeta} &= -\frac{e^2\zeta}{mr^3}. \end{aligned}\right| \tag{11}$$

Dies sind im $\xi\eta\zeta$-System die Bewegungsgleichungen eines Elektrons unter dem Einfluß des Potentials:

$$V = -\frac{e^2}{r} + \frac{mf^2}{8}(\xi^2 + \eta^2). \tag{11a}$$

Vernachlässigt man aber Glieder mit f^2, so hat man genau die Bewegungsgleichungen ohne Magnetfeld und die Keplersche Ellipse; ihre Bahnebene liegt im $\xi\eta\zeta$-System fest, beschreibt aber im xyz-System wegen (7) eine gleichförmige Präzession um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $f/2$.

Die Vernachlässigung der Glieder mit f^2 läßt sich numerisch rechtfertigen; denn es ist für den $n$ten Bohrschen Kreis

$$\frac{e^2}{mr^3} = \frac{(2\pi)^6 m^2 e^8}{h^6 n^6} = \frac{1{,}7\cdot 10^{33}}{n^6},$$

dagegen für ein Magnetfeld $H = 10000$ Gauß

$$\frac{f^2}{4} = 7{,}8\cdot 10^{21}.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite von (11) überwiegt also das zweite auch bei höheren Werten von n um einen Faktor 10^{10}.

Durch unsere Reduktion auf das $\xi\eta\zeta$-System sind nun genau diejenigen Verhältnisse geschaffen, von denen in der Einleitung die Rede war: ein Magnetfeld von verschwindender Stärke und eine physikalisch ausgezeichnete Äquator-Ebene $\zeta = 0$. In diesem System gelten daher die dort angegebenen Resultate: Die Bahnebene ist gegen die Äquatorebene um einen Winkel α geneigt, welcher nur die durch (1) § 1 ganzzahlig bestimmten Werte annehmen darf. Die Flächenkonstante für die Äquatorebene (die wir jetzt sinngemäß nicht p_φ sondern p_χ nennen werden) ist durch (3) § 1 bestimmt:

$$2\pi p_\chi = n_1 h, \tag{12}$$

die Energie im $\xi\eta\zeta$-System (die wir entsprechend mit W_χ bezeichnen) durch (2) § 1:

$$W_\chi = \frac{Nh}{(n+n')^2}.$$

Wegen des Beweises dieser Resultate sei auf die eingangs zitierte Annalenarbeit verwiesen; übrigens enthalten die späteren relativistischen Rechnungen den vorliegenden Fall als Spezialfall.

Wir fragen nun nach der Energie der Bewegung im xyz-System. Sie ist

$$W = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2) - \frac{e^2}{r}.$$

Benutzen wir die Beziehung (7) und vernachlässigen das Glied mit f^2, so entsteht

$$W = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\chi}^2) - \frac{e^2}{r} + mr^2\sin^2\vartheta\,\dot{\chi}\frac{f}{2}.$$

Die beiden ersten Terme rechts sind identisch mit W_χ, der Faktor von $\frac{f}{2}$ im dritten Term ist

nach (8) gleich p_χ. Benutzen wir für p_χ Gl. (12), so entsteht

$$W = W_\chi + \frac{f}{4\pi} n_1 h, \quad \Delta W = W - W_0 = \frac{f}{4\pi} n_1 h.$$

W_χ ist identisch mit der Energie W_0, die unsere Bahn ohne Magnetfeld besitzen würde;

$$\Delta W = W - W_\chi = W - W_0 \qquad (13)$$

stellt also diejenige Energie dar, die in der magnetischen Präzession der Bahn steckt. Nach dem Bohrschen Frequenzansatz ist die Schwingungszahl der Spektrallinie gegeben durch

$$h\nu = W_m - W_n.$$

W_m bedeutet die Energie der Anfangsbahn, welche durch die Quantenzahlen $m = m_1 + m_2$ und m' bestimmt ist, W_n die Energie der Endbahn, die zu den Quantenzahlen $n = n_1 + n_2$ und n' gehört. Die Änderung der Schwingungszahl durch das Magnetfeld beträgt also

$$\Delta\nu = \frac{\Delta W_m - \Delta W_n}{h} = \frac{f}{4\pi}(m_1 - n_1). \qquad (14)$$

Die normale Lorentzsche Verschiebung (Abstand der s-Komponenten im Lorentzschen Triplett von der p-Komponente) ist in unseren Bezeichnungen

$$\Delta\nu_{\text{norm}} = \frac{f}{4\pi}.$$

Es ergibt sich also:

$$\Delta\nu = \Delta\nu_{\text{norm}} \cdot Z, \quad Z = m_1 - n_1 = \text{ganze Zahl}. \qquad (15)$$

§ 3. Diskussion des Resultats.

Unser Resultat (15) fällt mit dem Ergebnis der klassischen Theorie nicht zusammen, aber dicht daneben. Unser $\Delta\nu$ ist, allgemein gesprochen, ein ganzes Vielfaches Z des normalen Lorentzschen $\Delta\nu$.

Naturgemäß bilden bei Bohrscher Auffassung die Polarisationen der Komponenten im Zeeman- und Starkeffekt eine besondere Schwierigkeit. Indessen zeigt unser Resultat auch in dieser Hinsicht eine Analogie mit der Wirklichkeit. Beim Starkeffekt hat Epstein die folgende merkwürdige Regel durchweg bestätigt gefunden: Es findet parallele (senkrechte) Polarisation der Starkkomponente statt, wenn die azimutale Quantenzahl beim Übergange um eine gerade (ungerade) Anzahl von Einheiten springt. Bei Epstein bezieht sich die azimutale Quantenzahl auf einen Winkel, der in der Ebene senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien gezählt wird; ihr entspricht bei uns (in gewissem Sinne) die Quantenzahl n_1 bzw. m_1. Übertragen wir also die Epsteinsche Regel auf unseren Fall, so haben wir zu erwarten: Bei geradem Z, insbesondere für $Z = 0$, haben wir parallele, bei ungeradem Z, insbesondere für $Z = 1$, senkrechte Polarisation, wie es sein soll.

Nach der von mir früher aufgestellten Regel der „Quantenungleichungen", nach der bei dem positiven Charakter der Quantenzahlen diese nur (oder vorzugsweise) von größeren zu kleineren Werten übergehen, würde $m_1 > n_1$, also Z eine positive ganze Zahl (einschl. der Null) sein. Dies scheint dem rechts und links symmetrischen Verhalten der Zeeman-Aufspaltung zu widersprechen. Indessen erhält man offenbar die Komponenten auf der negativen Seite, wenn man den Sinn von H, also das Vorzeichen von f umkehrt. Umkehrung des Umlaufsinnes in der Keplerellipse ist aber gleichbedeutend mit Umkehrung von H. Da der Umlaufsinn bei uns unbestimmt bleibt, ist also auch unser Resultat rechts und links symmetrisch.

Hiernach ergibt sich das Bild der Fig. 2, ein normales Lorentzsches Triplett mit

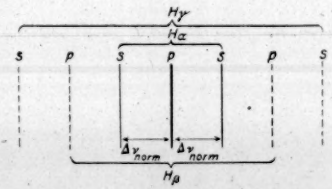


Fig. 2.

einer Anzahl äußerer, abwechselnd parallel und senkrecht polarisierter überzähliger Komponenten vom gegenseitigen Abstande $\Delta\nu_{\text{norm}}$.

Wir wollen die Zahl dieser überzähligen Komponenten im einzelnen bestimmen. Bei H_α

$$\frac{\nu}{N} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}$$

ist $m + m' = 3$, $n + n' = 2$. Der Fall n bzw. m gleich Null ist auszuschließen, da derselbe einer ausgearteten Ellipse von der Exzentrizität 1 entsprechen würde, die das Elektron durch den Kern hindurch führen würde. Es sind also die folgenden Fälle möglich, wenn man nur Übergänge von abnehmenden Quantenzahlen in allen drei Zahlenpaaren $m_1 n_1$, $m_2 n_2$, $m' n'$ betrachtet:

$m' = 0$	$m_2 = 3$	$m_1 = 0$	$n' = 0$	$n_2 = 2$	$n_1 = 0$	$Z = 0$
$m' = 0$	$m_2 = 2$	$m_1 = 1$	$n' = 0$	$n_2 = 2$	$n_1 = 0$	$Z = 1$
$m' = 0$	$m_2 = 2$	$m_1 = 1$	$n' = 0$	$n_2 = 1$	$n_1 = 1$	$Z = 0$
$m' = 0$	$m_2 = 1$	$m_1 = 2$	$n' = 0$	$n_2 = 1$	$n_1 = 1$	$Z = 1$
$m' = 0$	$m_2 = 1$	$m_1 = 2$	$n' = 0$	$n_2 = 0$	$n_1 = 2$	$Z = 0$
$m' = 0$	$m_2 = 0$	$m_1 = 3$	$n' = 0$	$n_2 = 0$	$n_1 = 2$	$Z = 1$
$m' = 1$	$m_2 = 2$	$m_1 = 0$	$n' = 1$	$n_2 = 1$	$n_1 = 0$	$Z = 0$
$m' = 1$	$m_2 = 2$	$m_1 = 0$	$n' = 0$	$n_2 = 2$	$n_1 = 0$	$Z = 0$
$m' = 1$	$m_2 = 1$	$m_1 = 1$	$n' = 1$	$n_2 = 1$	$n_1 = 0$	$Z = 1$
$m' = 1$	$m_2 = 1$	$m_1 = 1$	$n' = 1$	$n_2 = 0$	$n_1 = 1$	$Z = 0$
$m' = 1$	$m_2 = 1$	$m_1 = 1$	$n' = 0$	$n_2 = 1$	$n_1 = 1$	$Z = 0$
$m' = 1$	$m_2 = 0$	$m_1 = 2$	$n' = 1$	$n_2 = 0$	$n_1 = 1$	$Z = 1$
$m' = 1$	$m_2 = 0$	$m_1 = 2$	$n' = 0$	$n_2 = 0$	$n_1 = 2$	$Z = 0$
$m' = 2$	$m_2 = 1$	$m_1 = 0$	$n' = 1$	$n_2 = 1$	$n_1 = 0$	$Z = 0$
$m' = 2$	$m_2 = 1$	$m_1 = 0$	$n' = 0$	$n_2 = 2$	$n_1 = 0$	$Z = 0$
$m' = 2$	$m_2 = 0$	$m_1 = 1$	$n' = 1$	$n_2 = 0$	$n_1 = 1$	$Z = 0$

Hier treten also noch keine überzähligen Komponenten auf; Z ist wegen unserer „Quantenungleichungen" auf die Werte 0 und 1 eingeschränkt.

Wohl aber wird bei H_β neben $Z = 0$ und 1 auch der Wert $Z = 2$ möglich, so daß wir eine überzählige Komponente haben, wie die folgenden Beispiele zeigen:

$m' = 0$	$m_2 = 0$	$m_1 = 4$	$n' = 0$	$n_2 = 0$	$n_1 = 2$	$Z = 2$
$m' = 0$	$m_2 = 1$	$m_1 = 3$	$n' = 0$	$n_2 = 1$	$n_1 = 1$	$Z = 2$
$m' = 1$	$m_2 = 0$	$m_1 = 3$	$n' = 1$	$n_2 = 0$	$n_1 = 1$	$Z = 2$
$m' = 1$	$m_2 = 1$	$m_1 = 2$	$n' = 1$	$n_2 = 1$	$n_1 = 0$	$Z = 2$

Bei H_γ tritt mit $Z = 3$ eine zweite überzählige Komponente hinzu usf. Allgemein haben wir mit $n + n' = N$, $m + m' = M > N$ als Höchstwert von Z

$$Z = M - N,$$

also $M - N - 1$ überzählige Komponenten.

Es ist interessant zu bemerken, daß eine ältere Theorie von Ritz[1]) überzählige Komponenten derselben Lage ergeben hat. Daß diese Komponenten real und bisher nur wegen geringer Intensität nicht bemerkt wären, ist recht unwahrscheinlich.

Wenn somit das Ergebnis auch keineswegs befriedigend ist, so überrascht doch die Leistungsfähigkeit der Quantentheorie im Verein mit dem Bohrschen Modelle auch in diesem Falle. Diese Leistungsfähigkeit übertrifft sogar die Erwartungen, die Herr Bohr selbst hinsichtlich des Zeemaneffekts geäußert hat. Er meinte: die elektrische Zerlegung der Spektrallinien werde durch eine Änderung der Elektronenbahnen und ihrer Energie bewirkt, die magnetische Zerlegung dagegen durch eine magnetische Beeinflussung des Übergangs von der Anfangs- in die Endbahn, die zu einer Abänderung des Frequenzansatzes führe. Wir sahen dagegen: Unter wörtlicher Beibehaltung dieses Ansatzes ergibt sich eine Energieänderung der Elektronenbahnen, die der Hauptsache nach auf das Lorentzsche Triplett führt, ohne Einführung irgendwelcher neuer Annahmen.

1) W. Ritz, Gesammelte Werke, Paris 1911, pag. 120, Ann. d. Phys. **25**, 660, 1908.

§ 4. Zeemaneffekt mit Relativität; die Bewegungsgleichungen.

Die Differentialgleichungen behalten die Form (1) § 2 bei; die rechten Seiten bleiben völlig ungeändert, auf der linken Seite ist unter m zu verstehen

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0}{\tau},$$

wo m_0 die Ruhemasse und τ die Eigenzeit bedeuten

$$\tau = \int \sqrt{1-\beta^2}\, dt\,, \quad \tau = \sqrt{1-\beta^2} = \frac{m_0}{m}. \tag{1}$$

Bei Benutzung der Polarkoordinaten r, ϑ, φ wird das Impulsmoment für die φ-Koordinate:

$$p_\varphi = m r^2 \sin^2\vartheta\, \dot{\varphi} = m_0 r^2 \sin^2\vartheta \frac{\dot{\varphi}}{\tau} = m_0 r^2 \sin^2\vartheta \frac{d\varphi}{d\tau}. \tag{2}$$

Die Stärke des Magnetfeldes ist jetzt zu messen durch das Produkt

$$f = \frac{e}{m_0}\frac{H}{c} \qquad (3)$$

Daraufhin folgt aus den Bewegungsgleichungen durch die übliche Rechnung an Stelle von Gl. (4) § 2:

$$\frac{d\,p_\varphi}{dt} = \frac{m_0 f}{2}\frac{d}{dt}(x^2+y^2) = \frac{m_0 f}{2}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\vartheta)$$

oder wegen (2) und (1)

$$\frac{d}{dt}\left(m r^2\sin^2\vartheta\left(\dot\varphi - \frac{m_0}{m}\frac{f}{2}\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(m r^2\sin^2\vartheta\left(\dot\varphi - \frac{f}{2}\dot\tau\right)\right) = 0. \qquad (4)$$

Ein Hilfswinkel χ ist jetzt offenbar folgendermaßen zu definieren:

$$\dot\chi = \dot\varphi - \frac{f}{2}\dot\tau, \quad \varphi = \chi + \frac{f}{2}\tau. \qquad (5)$$

Nach Einführung desselben schreibt sich der Flächensatz (4) einfach so:

$$\frac{d\,p_\chi}{dt} = 0, \quad p_\chi = m r^2\sin^2\vartheta\,\dot\chi = m_0 r^2\sin^2\vartheta\frac{\chi}{\tau} = m_0 r^2\sin^2\vartheta\frac{d\chi}{d\tau}. \qquad (6)$$

Während p_φ unter dem Einfluß des Magnetfeldes variabel ist, wird wieder das auf den Hilfswinkel χ bezogene Impulsmoment p_χ konstant. Dabei unterscheiden sich φ und χ nicht wie früher um den Betrag $\frac{f}{2}t$, der proportional mit der Zeit wächst, sondern um den Betrag $\frac{f}{2}\tau$, der proportional der Eigenzeit anwächst. Dementsprechend ist jetzt ein $\xi\eta\zeta$-System einzuführen, welches gegen das xyz-System um die z-Achse gleichförmig in der Eigenzeit τ, aber ungleichförmig in der Zeit t gedreht wird.

Wir schreiben die Gl. (1) § 2 zunächst so:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m\dot x + m_0 f y) &= \frac{d}{dt}(m(\dot x + f\dot\tau y)) = -\frac{e^2}{r^3}x,\\ \frac{d}{dt}(m\dot y - m_0 f x) &= \frac{d}{dt}(m(\dot y - f\dot\tau x)) = -\frac{e^2}{r^3}y,\\ \frac{d}{dt}(m\dot z) &= -\frac{e^2}{r^3}z.\end{aligned}\right| \qquad (7)$$

Aus

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta$$
$$\xi = r\sin\vartheta\cos\chi, \quad \eta = r\sin\vartheta\sin\chi, \quad \zeta = r\cos\vartheta$$

ergibt sich wegen (5)

$$\left.\begin{aligned}x &= \xi\cos\frac{f}{2}\tau - \eta\sin\frac{f}{2}\tau,\\ y &= \xi\sin\frac{f}{2}\tau + \eta\cos\frac{f}{2}\tau,\\ z &= \zeta,\end{aligned}\right| \qquad (8)$$

ferner

$$\dot x + f\dot\tau y = \left(\dot\xi + \frac{f}{2}\dot\tau\eta\right)\cos\frac{f}{2}\tau - \left(\dot\eta - \frac{f}{2}\dot\tau\xi\right)\sin\frac{f}{2}\tau,$$
$$\dot y - f\dot\tau x = \left(\dot\xi + \frac{f}{2}\dot\tau\eta\right)\sin\frac{f}{2}\tau + \left(\dot\eta - \frac{f}{2}\dot\tau\xi\right)\cos\frac{f}{2}\tau,$$

endlich mit Rücksicht auf die Beziehung

$$m\dot\tau = m_0, \text{ Gl. (1)}$$

$$\frac{d}{dt}(m(\dot x + f\dot\tau y)) = \left(\frac{d}{dt}(m\dot\xi) + m_0\left(\frac{f}{2}\right)^2\dot\tau\xi\right)\cos\frac{f}{2}\tau - \left(\frac{d}{dt}(m\dot\eta) + m_0\left(\frac{f}{2}\right)^2\dot\tau\eta\right)\sin\frac{f}{2}\tau$$
$$\frac{d}{dt}(m(\dot y - f\dot\tau y)) = \left(\frac{d}{dt}(m\dot\xi) + m_0\left(\frac{f}{2}\right)^2\dot\tau\eta\right)\sin\frac{f}{2}\tau + \left(\frac{d}{dt}(m\dot\eta) + m_0\left(\frac{f}{2}\right)^2\dot\tau\eta\right)\cos\frac{f}{2}\tau.$$

Für das $\xi\eta\zeta$-System folgt daher aus (7) und (8)

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m\dot\xi) &= -\frac{e^2}{r^3}\xi - m_0\left(\frac{f}{2}\right)^2\dot\tau\xi,\\ \frac{d}{dt}(m\dot\eta) &= -\frac{e^2}{r^3}\eta - m_0\left(\frac{f}{2}\right)^2\dot\tau\eta,\\ \frac{d}{dt}(m\dot\zeta) &= -\frac{e^2}{r^3}\zeta.\end{aligned}\right| \qquad (9)$$

Vernachlässigt man wie in § 2 Glieder mit f^2, so hat man wieder genau die Bewegungsgleichungen ohne Magnetfeld, also eine Keplersche Ellipse, deren Bahnebene im $\xi\eta\zeta$-System festliegt, im xyz-System aber eine Präzession um die z-Achse ausführt, u. zw. eine in der Zeit t ungleichförmige, in der Eigenzeit τ gleichförmige Präzession.

Will man aber die Glieder mit f^2 zunächst beibehalten, so lassen sich die auf den rechten Seiten von (9) stehenden Kräfte nicht mehr wie früher aus einem Potential ableiten und die Bewegungsgleichungen haben dementsprechend nicht die kanonische Form. Um hierzu zu gelangen, muß man zweierlei tun: Man muß einerseits die Eigenzeit τ als unabhängige Variable einführen, andererseits Gebrauch machen von dem Satze der lebendigen Kraft.

Dividiert man die Gl. (9) rechts und links mit $\dot\tau$, so erhält man zunächst:

$$\left.\begin{aligned}m_0\frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= -\frac{e^2}{r^3}\frac{\xi}{\dot\tau} - m_0\left(\frac{f}{2}\right)^2\xi,\\ m_0\frac{d^2\eta}{d\tau^2} &= -\frac{e^2}{r^3}\frac{\eta}{\dot\tau} - m_0\left(\frac{f}{2}\right)^2\eta,\\ m_0\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} &= -\frac{e^2}{r^3}\frac{\zeta}{\dot\tau}.\end{aligned}\right| \qquad (10)$$

Man beachte dabei, daß τ nicht die Eigenzeit im $\xi\eta\zeta$-System, sondern diejenige im xyz-System ist. Daß man die Bewegungsgleichungen des Massenpunktes durch Einführung seiner Eigenzeit vereinfacht, ist seit Minkowski wohl bekannt. Mit der hier gewonnenen Vereinfachung hat es dagegen eine andere Bewandtnis, da es sich hier sozusagen um eine „fremde Eigenzeit" handelt.

Der Zusammenhang zwischen der Eigenzeit im xyz-System τ und der Eigenzeit im $\xi\eta\zeta$-System — wir wollen sie etwa T nennen — folgt aus der Gl. (8) durch Differentiation. Es ist nämlich

$$\dot{x}=(\dot{\xi}-\frac{f}{2}\dot{\tau}\eta)\cos\frac{f}{2}\tau-(\dot{\eta}+\frac{f}{2}\dot{\tau}\xi)\sin\frac{f}{2}\tau,$$
$$\dot{y}=(\dot{\xi}-\frac{f}{2}\dot{\tau}\eta)\sin\frac{f}{2}\tau+(\dot{\eta}+\frac{f}{2}\dot{\tau}\xi)\cos\frac{f}{2}\tau,$$

daher

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=&(\dot{\xi}-\frac{f}{2}\dot{\tau}\eta)^2+(\dot{\eta}+\frac{f}{2}\dot{\tau}\xi)^2+\dot{\zeta}^2=\\ &\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2+f\dot{\tau}(\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi})+\left(\frac{f}{2}\right)^2(\xi^2+\eta^2)\dot{\tau}^2.\end{aligned}\right| \quad (11)$$

Nun gilt aber

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=c^2(1-\dot{\tau}^2),\ \dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2=c^2(1-\dot{T}^2),$$
$$\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi}=\frac{p_\chi}{m}=\frac{p_\chi\dot{\tau}}{m_0}. \quad (12)$$

Also

$$c^2(1-\dot{\tau}^2)=c^2(1-\dot{T}^2)+\left(\frac{fp_\chi}{m_0}+\left(\frac{f}{2}\right)^2(\xi^2+\eta^2)\right)\dot{\tau}^2,$$
$$\dot{T}^2=\dot{\tau}^2\left\{1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{fp_\chi}{m_0}+\left(\frac{f}{2}\right)^2(\xi^2+\eta^2)\right)\right\}. \quad (13)$$

Was sodann den Satz der lebendigen Kraft betrifft, so beträgt die kinetische Energie im xyz-System bekanntlich

$$m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)=\frac{m_0c^2}{\dot{\tau}}-m_0c^2.$$

Die potentielle Energie ist, da das magnetische Feld wattlos wirkt:

$$V=-\frac{e^2}{r}.$$

Bedeutet W die bei der Bewegung konstante Gesamtenergie, so gilt also

$$\frac{1}{\dot{\tau}}=\frac{1}{m_0c^2}\left(W+\frac{e^2}{r}\right)+1. \quad (14)$$

Bei Benutzung dieser Form der Energiegleichung nehmen die Bewegungsgleichungen (10) eine wesentlich einfachere Form an.

§ 5. Kanonische Form der Bewegungsgleichungen.

Durch Eintragen von (14) in (10) des vorigen Paragraphen ergibt sich

$$m_0\frac{d^2\xi}{d\tau^2}=-\frac{e^2\xi}{r^3}\left(1+\frac{W}{m_0c^2}\right)-\frac{e^4\xi}{m_0c^2r^4}-m_0\left(\frac{f}{2}\right)^2\xi,$$
$$m_0\frac{d^2\eta}{d\tau^2}=-\frac{e^2\eta}{r^3}\left(1+\frac{W}{m_0c^2}\right)-\frac{e^4\eta}{m_0c^2r^4}-m_0\left(\frac{f}{2}\right)^2\eta,$$
$$m_0\frac{d^2\zeta}{d\tau^2}=-\frac{e^2\zeta}{r^3}\left(1+\frac{W}{m_0c^2}\right)-\frac{e^4\zeta}{m_0c^2r^4}. \quad (1)$$

Die rechten Seiten sind die negativen Ableitungen nach $\xi\eta\zeta$ des Potentials

$$V=-\frac{e^2}{r}\left(1+\frac{W}{m_0c^2}\right)-\frac{e^4}{2m_0c^2r^2}+m_0\frac{f^2}{8}(\xi^2+\eta^2). \quad (2)$$

Führt man noch die Impulskomponenten

$$p_\xi=m_0\frac{d\xi}{d\tau},\ p_\eta=m_0\frac{d\eta}{d\tau},\ p_\zeta=m_0\frac{d\zeta}{d\tau} \quad (3)$$

(die wegen Benutzung der „fremden Eigenzeit" τ nicht mit den Impulskomponenten im $\xi\eta\zeta$-Sytem identisch sind) sowie die Hamiltonsche Funktion

$$H=\frac{p_\xi^2+p_\eta^2+p_\zeta^2}{2m_0}+V \quad (4)$$

ein, so schreiben sich die Gl. (1) und (3) in die folgende kanonische Form um:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp_\xi}{d\tau}&=-\frac{\partial H}{\partial\xi},\ \frac{dp_\eta}{d\tau}=-\frac{\partial H}{\partial\eta},\ \frac{dp_\zeta}{d\tau}=-\frac{\partial H}{\partial\zeta},\\ \frac{d\xi}{d\tau}&=+\frac{\partial H}{\partial p_\xi},\ \frac{d\eta}{d\tau}=+\frac{\partial H}{\partial p_\eta},\ \frac{d\zeta}{d\tau}=+\frac{\partial H}{\partial p_\zeta}.\end{aligned}\right| \quad (5)$$

Aus dieser Form der Gleichungen schließt man sofort, daß gilt:

$$\frac{dH}{d\tau}=0,\ \text{also}\ H=H_0=\text{konst.} \quad (6)$$

Allerdings ist die Konstante H_0 der Hamiltonschen Funktion nicht, wie in den gewöhnlichen Problemen der Mechanik, identisch mit der Energiekonstanten W. Wir finden aber den Ausdruck von H_0 durch W folgendermaßen:

Zunächst ist

$$\frac{p_\xi^2+p_\eta^2+p_\zeta^2}{2m_0}=\frac{m_0}{2}\frac{\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2}{\dot{\tau}^2}.$$

Aus den Gl. (11) und (12) des vorigen Paragraphen entnimmt man:

$$\frac{\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2}{\dot{\tau}^2}=\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{\dot{\tau}^2}-\frac{fp_\chi}{m_0}-\left(\frac{f}{2}\right)^2(\xi^2+\eta^2)$$
$$=c^2\left(\frac{1}{\dot{\tau}^2}-1\right)-\frac{fp_\chi}{m_0}-\left(\frac{f}{2}\right)^2(\xi^2+\eta^2).$$

Nimmt man noch Gl. (14) des vorigen Paragraphen hinzu, so wird

$$\frac{p_\xi^2+p_\eta^2+p_\zeta^2}{2m_0}=\frac{1}{2m_0c^2}\left(W+\frac{e^2}{r}\right)^2+\left(W+\frac{e^2}{r}\right)-\frac{fp_\chi}{2}-\frac{m_0f^2}{8}(\xi^2+\eta^2). \quad (7)$$

Addiert man hierzu den Ausdruck von V in Gl. (2), so fallen alle veränderlichen Terme her-

aus und es entsteht als Konstante der Hamiltonschen Funktion:

$$H_0 = W\left(1 + \frac{W}{2m_0c^2}\right) - \frac{fp_\chi}{2}. \qquad (8)$$

Bekanntlich besteht Jacobis Integrationsmethode der kanonischen Gleichungen der Mechanik darin, eine Wirkungsfunktion S einzuführen, die in unserem Falle der drei Variabeln $\xi\eta\zeta$ folgendermaßen zu definieren ist

$$S = \int_{\xi_0}^{\xi} p_\xi d\xi + \int_{\eta_0}^{\eta} p_\eta d\eta + \int_{\zeta_0}^{\zeta} p_\zeta d\zeta, \qquad (9)$$

also als Summe der drei „Phasenintegrale" mit unbestimmter oberer und beliebiger unterer Grenze. Da hiernach

$$p_\xi = \frac{\partial S}{\partial \xi}, \; p_\eta = \frac{\partial S}{\partial \eta}, \; p_\zeta = \frac{\partial S}{\partial \zeta}, \qquad (10)$$

so folgt aus (7) als Jacobische partielle Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \zeta}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\left(W + \frac{e^2}{r}\right)^2 + 2m_0\left(W + \frac{e^2}{r}\right) - m_0 f p_\chi - \left(\frac{m_0 f}{2}\right)^2 (\xi^2 + \eta^2) \qquad (11)$$

oder, in Polarkoordinaten $r\vartheta\chi$ geschrieben:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial S}{\partial \chi}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\left(W + \frac{e^2}{r}\right)^2 + 2m_0\left(W + \frac{e^2}{r}\right) - m_0 f p_\chi - \left(\frac{m_0 f}{2}\right)^2 r^2 \sin^2\vartheta. \qquad (12)$$

Setzt man hierin $c = \infty$, so erhält man natürlich die entsprechende partielle Differentialgleichung für den Zeemaneffekt ohne Relativität. Die zugehörigen gewöhnlichen Differentialgleichungen sind durch (5) gegeben, wenn man darin τ durch t und H ersetzt durch

$$H = \frac{p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2}{2m_0} - \frac{e^2}{r} + \frac{m_0 f^2}{8}(\xi^2 + \eta^2),$$

wie sich aus (2) mit $c = \infty$ ergibt.

Setzt man andererseits $f = 0$, so fällt man auf das Keplersche Problem ohne Magnetfeld, aber mit Relativität zurück. Die Hamiltonsche Funktion lautet in diesem Falle nach unserer Methode, bei der als unabhängige Variable die Eigenzeit benutzt wird:

$$H = \frac{p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2}{2m_0} - \frac{e^2}{r}\left(1 + \frac{W}{m_0c^2}\right) - \frac{e^4}{2m_0c^2r^2}$$

und unterscheidet sich scheinbar wesentlich von der gewöhnlich angegebenen Form der Hamiltonschen Funktion, bei der als unabhängige Variable in den kanonischen Differentialgleichungen die Zeit t benutzt wird:

$$H = m_0c^2\left(\sqrt{1 + \frac{p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2}{m_0^2c^2}} - 1\right) - \frac{e^2}{r}. \qquad (13)$$

Dieser letzte Ausdruck ist nichts anderes als die Summe von kinetischer und potentieller Energie in relativistischer Form, ausgedrückt durch die rechtwinkligen Impulskoordinaten, welche im Anschluß an das Vorhergehende mit p_ξ, p_η, p_ζ bezeichnet sind. Bildet man hiermit die kanonischen Differentialgleichungen

$$\frac{dp_\xi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi}, \ldots \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\xi}, \ldots$$

so unterscheiden sich dieselben formal von denjenigen Gleichungen, die aus (5) mit $f = 0$ entstehen. Bildet man aber die Jacobische partielle Differentialgleichung, indem man in (13) p_ξ, p_η, p_ζ durch (10) ersetzt und H gleich W macht, so entsteht

$$1 + \frac{1}{m_0^2c^2}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \zeta}\right)^2\right) = \left(1 + \frac{1}{m_0c^2}\left(W + \frac{e^2}{r}\right)\right)^2.$$

Dies erweist sich als völlig identisch mit der Gl. (11), wenn man darin $f = 0$ setzt. Es ist auch von vornherein klar, daß die Einführung der Eigenzeit, die nur ein analytisches Hilfsmittel zur Vereinfachung der Gleichungen war, keinen Einfluß haben kann auf die Jacobische Differentialgleichung, aus der sie herausfällt, und auf die weiteren aus ihr zu ziehenden Schlüsse.

Schließlich läßt sich auch für den Zeemaneffekt mit Relativität eine Form der Hamiltonschen Funktion angegeben, die der Gl. (13) analog gebaut ist und zu kanonischen Gleichungen mit der unabhängigen Variabeln t statt τ gehört. Sie lautet nach einer freundlichen Mitteilung von G. Herglotz:

$$H = m_0c^2\left(\sqrt{1 + \frac{w^2}{m_0^2c^2}} - 1\right) - \frac{e^2}{r}$$

mit der Abkürzung

$$w^2 = \left(p_\xi - \frac{m_0 f}{2}\eta\right)^2 + \left(p_\eta + \frac{m_0 f}{2}\xi\right)^2 + p_\zeta^2.$$

Die Konstante H_0 wird alsdann mit der Energie W identisch; die zugehörige Jacobische Gleichung stimmt mit (11) überein.

§ 6. Aufstellung der Quantenbedingungen.

Ebenso wie die rechtwinkligen Impulskomponenten in Gl. (10) des vorigen Paragraphen sind bei Einführung beliebiger Koordinaten q_i die zugehörigen Impulskomponenten die Ableitungen der Wirkungsfunktion nach den betr. q:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}.$$

Die von mir aufgestellte allgemeine Quantenbedingung für die Koordinate q_i

$$\int p_i dq_i = n_i \cdot h \,(n_i = \text{ganze Zahl})$$

schreibt sich daher einfach

$$\int \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i = [S]_i = n_i h .$$

Hier bedeutet $[S]_i$ die Änderung, welche die Wirkungsfunktion erfährt, wenn die Koordinate q_i denjenigen Bereich durchläuft, der zur Darstellung aller „Phasen" des betrachteten Systems erforderlich ist. Wir nennen diese Änderung den i^{ten} Periodizitätsmodul von S und haben den in der Einleitung genannten Satz: Die Periodizitätsmoduln der Jacobischen Wirkungsfunktion sind ganze Vielfache des Planckschen Wirkungsquantums.

Wenden wir dieses Schema auf unsere Polarkoordinaten r, ϑ, χ an, so lautet es:

$$[S]_\chi = n_1 h,\ [S]_\vartheta = n_2 h,\ [S]_r = n' h . \qquad (1)$$

Aus der Differentialgleichung (12) des vorigen Paragraphen, in der χ rechter Hand nicht vorkommt, ergibt sich

$$\frac{\partial S}{\partial \chi} = p_\chi = \text{konst.}; \qquad (2)$$

da der Wertebereich des Winkels χ sich von 0 bis 2π erstreckt, hat man

$$[S]_\chi = \int_0^{2\pi} p_\chi d_\chi = 2\pi p_\chi . \qquad (3)$$

Setzt man den aus (1), (2) und (3) folgenden Wert

$$p_\chi = \frac{\partial S}{\partial \chi} = \frac{n_1 h}{2\pi}$$

in Gl. (12) des vorigen Paragraphen ein, so ergibt sich:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\left(W + \frac{e^2}{r}\right)^2 + 2m_0\left(W + \frac{e^2}{r}\right) - m_0 f \cdot \frac{n_1 h}{2\pi} - \left(\frac{m_0 f}{2}\right)^2 r^2 \sin^2\vartheta - \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\left(\frac{n_1 h}{2\pi}\right)^2 , \qquad (4)$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2 = \left(\frac{1}{c}(W + \frac{e^2}{r}) + m_0 c\right)^2 - \left(\frac{m_0 f}{2} r \sin\vartheta + \frac{n_1 h}{2\pi r \sin\vartheta}\right)^2 - m_0^2 c^2 . \qquad (4a)$$

Es wäre nun prinzipiell erforderlich, diese Gleichung in Strenge zu integrieren. Dies ist aber nach der gewöhnlichen Methode der Separation der Variabeln jedenfalls nicht möglich. Wir vernachlässigen daher das Glied mit f^2, indem wir uns auf die Abschätzung seiner Größe in § 2 berufen. Dann läßt sich (4) unter Hinzufügung des Gliedes

$$\pm \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta_0}\left(\frac{n_1 h}{2\pi}\right)^2$$

separieren in die beiden folgenden Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sin^2\vartheta_0} - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\right)\left(\frac{n_1 h}{2\pi}\right)^2 . \qquad (5)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\left(W + \frac{e^2}{r}\right)^2 + 2m_0\left(W + \frac{e^2}{r}\right) - m_0 f \frac{n_1 h}{2\pi} - \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta_0}\left(\frac{n_1 h}{2\pi}\right)^2 . \qquad (6)$$

ϑ_0 ist eine durch unsere Zerfällung neu eingeführte Integrationskonstante, deren Bedeutung aus (5) hervorgeht. Es muß nämlich $\partial S/\partial\vartheta$ reell sein und ϑ seiner geometrischen Bedeutung nach zwischen 0 und π liegen. Aus beidem folgt:

$$\sin\vartheta > \sin\vartheta_0,\ \vartheta_0 \leqq \vartheta \leqq \pi - \vartheta_0 . \qquad (7)$$

ϑ_0 bestimmt also den Wertebereich, in dem der Winkel ϑ variieren kann. Daß ϑ die Grenzen ϑ_0 und $\pi - \vartheta_0$ wirklich erreicht, folgt aus Stetigkeitsgründen; eine Umkehr des Fortschreitungssinnes von ϑ kann nämlich nur an solchen Stellen erfolgen, wo $\frac{\partial S}{\partial \vartheta} = 0$, also $\sin\vartheta = \sin\vartheta_0$ ist. Infolgedessen wächst ϑ dauernd von ϑ_0 bis $\pi - \vartheta_0$, nimmt dauernd ab bis ϑ_0 usf. Der volle Wertebereich von ϑ entspricht dem Hin- und Rückwege von ϑ_0 bis $\pi - \vartheta_0$ und von $\pi - \vartheta_0$ bis ϑ_0.

Hiernach wird, das Integral über den eben genannten Wertebereich genommen:

$$[S]_\vartheta = \int \frac{\partial S}{\partial \vartheta} d\vartheta = \frac{n_1 h}{2\pi} \int \sqrt{\frac{1}{\sin^2\vartheta_0} - \frac{1}{\sin^2\vartheta}}\, d\vartheta .$$

Nach (1) lautet also unsere Quantenbedingung für ϑ:

$$\int \sqrt{\frac{1}{\sin^2\vartheta_0} - \frac{1}{\sin^2\vartheta}}\, d\vartheta = 2\pi \frac{n_2}{n_1} . \qquad (8)$$

Wir wenden uns zur Quantenbedingung in r und schreiben Gl. (6) zunächst abkürzend

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \sqrt{A + 2\frac{B}{r} + \frac{C}{r^2}}, \qquad (9)$$

$$A = \frac{W^2}{c^2} + 2m_0 W - m_0 f \frac{n_1 h}{2\pi},$$
$$B = \frac{We^2}{c^2} + m_0 e^2,\ C = \frac{e^4}{c^2} - \frac{1}{\sin^2\vartheta_0}\left(\frac{n_1 h}{2\pi}\right)^2 . \qquad (9a)$$

Aus denselben Gründen wie vorher kann r im Verlauf der Bewegung seinen Fortschreitungssinn nur an solchen Stellen umkehren, für welche $dS/\partial r$ verschwindet. Die Grenzen $r_{\min}$ und $r_{\max}$, innerhalb deren r variiert, sind daher gegeben durch die quadratische Gleichung

$$A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2} = 0 .$$

Der volle Wertebereich von r erstreckt sich von der einen Wurzel dieser Gleichung bis zur anderen und wieder zurück zur ersten. Infolge-

dessen wird nach (1) unsere dritte Quantenbedingung:

$$[S]_r = \int \sqrt{A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}}\, dr = n'h \ldots \quad (10)$$

In beiden Fällen (8) und (10) haben wir es also, wie in der Einleitung bemerkt, mit sog. vollständigen Integralen zu tun, das Wort entlehnt aus der Theorie der elliptischen Integrale und in dem Sinne verstanden, daß die Integration von einem Verzweigungspunkte des Integranden (Verschwindungspunkte der Quadratwurzel) bis zum anderen und wieder zurück zum ersten geführt werden soll. Da ein vollständiges Integral analytisch ein wesentlich einfacheres Ding ist als ein unvollständiges, werden wir bei der Ausrechnung unserer Quantenbedingungen im nächsten Paragraphen von denjenigen Methoden Nutzen ziehen, die sich für vollständige, d. h. im Komplexen geschlossene Integrale darbieten. Die Allgemeinheit unserer Überlegung, die eigentlich nur auf der Stetigkeit von S und dem quadratischen Charakter des Differentialparameters

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \zeta}\right)^2$$

beruhte, zeigt, daß auch ganz allgemein bei beliebigen Freiheitsgraden und bei beliebigen Kraftfeldern (äußeren oder inneratomistischen) unsere Quantenbedingungen auf vollständige Integrale führen und der Methode der komplexen Integration zugänglich sein müssen.

§ 7. Ausrechnung der Quantenbedingungen durch komplexe Integration.

Als Typus unserer Phasenintegrale betrachten wir die Form (10) des vorigen Paragraphen

$$J = \oint \sqrt{A + 2\frac{B}{r} + \frac{C}{r^2}}\, dr. \quad (1)$$

Durch den am Integralzeichen angebrachten Kreis wird wie üblich der geschlossene Charakter des Integrationsweges angedeutet. Er

Fig. 3.

erstreckt sich (vgl. Fig. 3) um die beiden Verzweigungspunkte $r_{\min}$ und $r_{\max}$ herum. Bezüglich des Vorzeichens der Quadratwurzel ist festzusetzen, daß dieses auf der reellen Achse zwischen $r_{\min}$ und $r_{\max}$ positiv sein soll bei positivem dr, negativ bei negativem dr. Wir führen demnach von $r_{\min}$ bis $r_{\max}$ einen „Verzweigungsschnitt", sprechen von einem „negativen" und einem „positiven Ufer" desselben und bestimmen den Wert der Quadratwurzel an allen anderen Stellen der komplexen Ebene unserer Figur (des „oberen Blattes" einer zweiblättrigen Riemannschen Fläche) im Anschluß an die Vorzeichen-Festsetzung auf den beiden Ufern unseres Verzweigungsschnittes. Z. B. gilt in der Nähe des Nullpunktes die Entwicklung

$$\sqrt{A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}} = \frac{\sqrt{C}}{r}\left(1 + \frac{B}{C}r + \ldots\right), \quad (2)$$

wo $\sqrt{C}$ eine negativ-imaginäre Größe sein muß, und in der Nähe des Unendlichkeitspunktes, den wir in der Figur der Deutlichkeit wegen ins Endliche hineintransformiert haben

$$\sqrt{A + \frac{2B}{r} + \frac{C}{r^2}} = \sqrt{A}\left(1 + \frac{B}{A}\frac{1}{r} + \ldots\right), \quad (3)$$

wo $\sqrt{A}$ eine positiv-imaginäre Größe sein muß. In der Tat gelangen wir von dem positiven Ufer des Verzweigungsschnittes nach dem Nullpunkt (bzw. Unendlichkeitspunkt) durch einen Umgang um den Verzweigungspunkt $r_{\min}$ (bzw. $r_{\max}$) vom Winkel 180° im negativen (bzw. positiven) Sinne, welcher Umgang den Faktor

$$e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i \quad (\text{bzw.} \cdot e^{+\frac{i\pi}{2}} = +i)$$

mit sich bringt. Hierdurch bestätigen sich unsere Angaben bei (2) und (3) über den negativ-imaginären bzw. positiv-imaginären Charakter von $\sqrt{C}$ und $\sqrt{A}$.

Wir formen nun unseren Integrationsweg, der ursprünglich um die Verzweigungspunkte herum führte, um in einen Umlauf um die singulären Punkte des Integranden; es sind dieses der Nullpunkt $r = 0$ und der Unendlichkeitspunkt $s = \frac{1}{r} = 0$.

Beide Umläufe lassen sich nach der Residuenregel unmittelbar berechnen. Da sie beide (vgl. die Figur) im negativen Sinne erfolgen, ist ihr Beitrag bzw.

$$-2\pi i\, N \text{ bzw. } -2\pi i\, U,$$

wo N und U die Residuen bei $r = 0$ und $s = 0$ sind. N ergibt sich aus (2) als Koeffizient von $1/r$ zu

$$N = \sqrt{C}.$$

Um U zu erhalten, haben wir (3) mit $dr = -ds/s^2$ zu multiplizieren und den Koeffizienten von ds/s zu nehmen. Dieser ist

$$U = -\sqrt{A}\frac{B}{A} = -\frac{B}{\sqrt{A}}.$$

Unser Integral (1) wird daher

$$J = -2\pi i (N+U) = -2\pi i \left(\sqrt{C} - \frac{B}{\sqrt{A}}\right). \quad (4)$$

Offenbar hat diese Berechnungsweise von J den Vorzug der Verallgemeinerungsfähigkeit.

Ebenso behandeln wir wegen einer späteren Anwendung das Integral

$$J' = \oint \frac{r\,dr}{\sqrt{A + 2\frac{B}{r} + \frac{C}{r^2}}}, \quad (5)$$

genommen auf demselben geschlossenen, in Fig 3 gezeichneten Wege. Auch jetzt ergibt sich:

$$J' = -2\pi i (N+U).$$

Indessen ist jetzt das Residuum N im Nullpunkte gleich Null, da hier der Nullpunkt als singulärer Punkt ausscheidet. Für den Unendlichkeitspunkt $s = 1/r = 0$ entwickelt, lautet der Integrand

$$-\frac{ds}{s^3}\frac{1}{\sqrt{A}}\left(1 + \frac{2B}{A}s + \frac{C}{A}s^2\right)^{-1/2} =$$
$$-\frac{ds}{s^3}\frac{1}{\sqrt{A}}\left(1 - \frac{B}{A}s + \left(\frac{3}{2}\frac{B^2}{A^2} - \frac{C}{2A}\right)s^2 + \ldots\right)$$

Der Faktor von ds/s ist also

$$U = -\frac{1}{2A^{3/2}}\left(\frac{3B^2}{A} - C\right).$$

Somit wird

$$J' = \frac{\pi i}{A^{3/2}}\left(\frac{3B^2}{A} - C\right). \quad (6)$$

Ähnlich verfahren wir mit dem Integral (8) des vorigen Paragraphen

$$J_1 = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\vartheta_0} - \frac{1}{\sin^2\vartheta}}\,d\vartheta.$$

Wir setzen

$$x = \sin^2\vartheta, \quad a = \sin^2\vartheta_0 \quad (7)$$

und erhalten

$$\sqrt{a}\,J_1 = \oint \sqrt{\frac{x-a}{1-x}}\,\frac{dx}{x}.$$

Die Integration, die in ϑ von ϑ_0 bis $\pi - \vartheta_0$ und zurück zu erstrecken war, geht in der x-Ebene (vgl. Fig. 4) von $x = a$ bis $x = 1$ und nach Umlaufung dieses Verzweigungspunktes

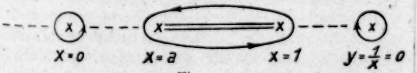


Fig. 4.

zurück bis $x = a$. Wir haben also auch hier ein in der x-Ebene geschlossenes Integral um die beiden Verzweigungspunkte $x = a$ und $x = 1$, welches wir auf die Umläufe um $x = 0$ und $x = \infty$ zusammenziehen können. Wiederum ergibt sich

$$\sqrt{a}\,J_1 = -2\pi i (N+U) \quad (8)$$

Das Residuum im Nullpunkt wird

$$N = -i\sqrt{a}. \quad (9)$$

Die Entwicklung des Integranden im Unendlichkeitspunkte $y = \frac{1}{x} = 0$ lautet

$$-\frac{dy}{y}\left(-1 - (1-a)y + \ldots\right)^{-1/2}.$$

Da man von dem positiven Ufer des Verzweigungsschnittes der Fig. 4 nach dem Unendlichkeitspunkt durch einen positiven Umgang um den Verzweigungspunkt $x = 1$ vom Winkel 180^0 gelangt, wird das Residuum im Unendlichkeitspunkte

$$U = -\frac{1}{e^{+\frac{\pi i}{2}}} = +i. \quad (9a)$$

Aus (8), (9), und (9a) ergibt sich also

$$\sqrt{a}\,J_1 = 2\pi(1 - \sqrt{a}). \quad (10)$$

Da aber nach Gl. (8) des vorigen Paragraphen war

$$J_1 = 2\pi\frac{n_2}{n_1},$$

so ergibt sich aus (7) und (10) dieses Paragraphen

$$\sqrt{a} = \sin\vartheta_0 = \frac{n_1}{n_1+n_2} = \frac{n_1}{n} \quad (11)$$

mit der früheren Abkürzung

$$n = n_1 + n_2.$$

Der Inhalt der Gl. (11) wurde bereits durch Gl. (1) und Fig. 1 der Einleitung dargestellt, welche also bei der relativistischen Behandlung ihre Gültigkeit behalten. In der Tat besteht zwischen unserem jetzigen Winkel ϑ_0 und dem früheren Neigungswinkel α der Bahnebene gegen die Äquatorebene die geometrische Beziehung

$$\sin\vartheta_0 = \cos\alpha.$$

Das auf den Winkel ϑ bezügliche Phasenintegral bestimmt also, wie in der Einleitung betont, die Lage der Bahnebene im Raume, und zwar im Raume des $\xi\eta\zeta$-Systems.

§ 8. Die Energie der Bewegung. Zeemaneffekt mit Relativität.

Wir überzeugen uns weiter, daß das auf den Radiusvektor r bezügliche Phasenintegral entsprechenderweise die Energie der Bewegung bestimmt. Nach Gl. (10) des vorvorigen und Gl. (4) des vorvorigen Paragraphen hat man

$$n'h = -2\pi i \left(\sqrt{C} - \frac{B}{\sqrt{A}}\right). \quad (1)$$

Wegen Gl. (11) des vorigen Paragraphen wird der Wert von C (vgl. Gl. (9a) des vorvorigen Paragraphen)

$$C = \frac{e^4}{c^2} - \left(\frac{nh}{2\pi}\right)^2 = -\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 (n^2 - \alpha^2), \qquad (2)$$

Hier bedeutet α die von mir früher eingeführte „Konstante der Feinstruktur“[1])

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} = 7{,}3 \cdot 10^{-3}.$$

Somit nach der der Gl. (2) des vorigen Paragraphen hinzugefügten Vorzeichenbestimmung

$$-2\pi i \sqrt{C} = -h\sqrt{n^2 - \alpha^2}$$

und nach Gl. (1)

$$\frac{Ah^2}{(2\pi B)^2} = -\frac{1}{(n' + \sqrt{n^2 - \alpha^2})^2}. \qquad (3)$$

Nach Gl. (9a) des vorvorigen Paragraphen ist

$$2\pi B = \frac{2\pi e^2}{c}\left(\frac{W}{c} + m_0 c\right) = ch\left(\frac{W}{c} + m_0 c\right),$$

$$A = \left(\frac{W}{c} + m_0 c\right)^2 - m_0^2 c^2 - m_0 f \frac{n_1 h}{2\pi},$$

$$\frac{Ah^2}{(2\pi B)^2} = \frac{1}{\alpha^2}\left(1 - \frac{m_0^2 c^2 + m_0 f \frac{n_1 h}{2\pi}}{\left(\frac{W}{c} + m_0 c\right)^2}\right),$$

also nach (3)

$$\frac{m_0^2 c^2 + m_0 f \frac{n_1 h}{2\pi}}{\left(\frac{W}{c} + m_0 c\right)^2} = 1 + \frac{\alpha^2}{(n' + \sqrt{n^2 - \alpha^2})^2}$$

$$\frac{W}{c} + m_0 c = \left(m_0^2 c^2 + m_0 f \frac{n_1 h}{2\pi}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{(n' + \sqrt{n^2 - \alpha^2})^2}\right)^{-1/2}.$$

Durch Division mit $m_0 c$ ergibt sich

$$1 + \frac{W}{m_0 c^2} = \left(1 + \frac{f}{2\pi}\frac{n_1 h}{m_0 c^2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{(n' + \sqrt{n^2 - \alpha^2})^2}\right)^{-1/2} \qquad (4)$$

Setzt man hierin $f = 0$, so folgt die Energie der Keplerschen Ellipse ohne Magnetfeld[2]), die wir W_0 nennen wollen

$$1 + \frac{W_0}{m_0 c^2} = \left(1 + \frac{\alpha^2}{(n' + \sqrt{n^2 - \alpha^2})^2}\right)^{-1/2}. \qquad (4a)$$

Man kann daher die Gl. (4) auch so schreiben

$$1 + \frac{W}{m_0 c^2} = \left(1 + \frac{f}{2\pi}\frac{n_1 h}{m_0 c^2}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{W_0}{m_0 c^2}\right)$$

oder bei konsequenter Vernachlässigung höherer Potenzen von f

$$1 + \frac{W}{m_0 c^2} = \left(1 + \frac{f}{4\pi}\frac{n_1 h}{m_0 c^2}\right)\left(1 + \frac{W_0}{m_0 c^2}\right).$$

Durch Ausrechnung folgt:

$$W - W_0 = \frac{f}{4\pi} n_1 h \left(1 + \frac{W_0}{m_0 c^2}\right). \qquad (5)$$

Aus Gl. (4a) ersieht man aber, daß

$$\frac{W_0}{m_0 c^2} \text{ von der Ordnung } \alpha^2 = 5{,}3 \cdot 10^{-5}$$

ist. Man kann daher ohne Fehler die vorige Gleichung einfacher schreiben:

$$W - W_0 = \frac{f}{4\pi} n_1 h. \qquad (6)$$

Damit sind wir auf Gl. (13) des § 2 zurückgefallen, aus welcher in gewissem Sinne (d. h. abgesehen von den überzähligen Komponenten) das normale Lorentzsche Triplett folgte. Unser Resultat lautet also: Der Zeemaneffekt mit Relativität ist nicht verschieden von dem Zeemaneffekt ohne Relativität. Oder anders ausgedrückt: Der Zeemaneffekt wird durch die aus der Relativitätstheorie folgende Feinstruktur der Wasserstofflinien nicht beeinflußt.

Dieses Resultat ist höchst verdächtig. Zwar kennt man den Zeemaneffekt der Wasserstofflinien wegen ihrer Diffusität nicht hinlänglich gut. Daß er aber für jede Komponente der H-Linien aus einem normalen Triplett bestehen sollte, ist sehr unwahrscheinlich. Tatsächlich zeigen den normalen Zeemaneffekt bei kleinen Feldern doch nur die einfachen Spektrallinien. Zweifellos ist der Paschen-Back-Effekt die allgemeinste und wichtigste magnetooptische Erfahrung, die wir haben; sie erklärt erst das normale Triplett der sog. einfachen Linien, die in Wirklichkeit wohl stets nur hinreichend enge mehrfache Linien sind. Von dem Paschen-Back-Effekt zeigt sich aber in unserer Berechnung keine Andeutung. Vielmehr würde nach unserer Gl. (6) die Mehrfachheit der H-Linien, die in der Mehrwertigkeit von W_0 steckt, auch in dem Werte von W erhalten bleiben, unabhängig von der Größe von f. Wir hätten also so viele sich überlagernde und sich nicht störende Tripletts (nebst überzähligen äußeren Linien) als wir ohne Magnetfeld Komponenten der Feinstruktur haben. Der Paschen-Back-Effekt tritt bekanntlich in Erscheinung, wenn f nicht mehr klein ist gegen $\Delta\nu_0$, d. h. gegen den ursprünglichen Abstand zweier Komponenten der mehrfachen Spektrallinie. In unserer Formel tritt aber das Verhältnis $f : \Delta\nu_0$ überhaupt nicht auf.

Wir müssen also unser Resultat (6) für

1) Vgl. Ann. d. Phys. l. c. Teil II. § 3, Gl. (12a); die ursprünglich in der Münchn. Akademie benutzte und ebenso bezeichnete Konstante war gleich $\alpha^2/4$.

2) Vgl. Ann. d. Phys. l. c. Teil II, Gl. (17), wo für Wasserstoff $E = e$ zu setzen ist.

unzureichend erklären und müssen nach dem Grunde hierfür fragen.

1. In meiner ursprünglichen Darstellung machte die Wahl der Koordinaten, in denen die Quantenbedingungen angesetzt wurden, Schwierigkeit. In den Arbeiten von Schwarzschild und Epstein scheint diese Schwierigkeit behoben durch die Anweisung: Man gehe von kanonischen Gleichungen aus und benutze solche Koordinaten, in denen sich die Jacobische Differentialgleichung separieren läßt. Nach dieser Anweisung sind wir in den letzten Paragraphen verfahren.

Indessen gelang die Separierung der Variabeln nicht in Strenge, sondern nur unter Vernachlässigung höherer Potenzen von f. Trotz der Kleinheit der fraglichen Glieder ist es möglich, daß sie einen prinzipiellen Einfluß auf den Ansatz der Quantenbedingungen haben könnten. Jedenfalls sind unsere Variabeln r, ϑ, χ nicht in Strenge die richtigen Variabeln, die der Quantelung unterworfen werden sollten. Bei dem diskreten Charakter der Quantenbedingungen wäre es nicht ausgeschlossen, daß diese Bedingungen für die in Strenge richtigen Koordinaten wesentlich anders lauten und sich nicht stetig anschließen an diejenigen Bedingungen, die für die nur angenähert und scheinbar richtigen Koordinaten r, ϑ, χ berechnet wurden.

2. Man könnte andererseits die Schuld auf die Bohrsche Frequenzgleichung

$$h\nu = W_m - W_n$$

schieben. Sie ist aus verschiedenen Gründen unzureichend: als skalare Gleichung kann sie niemals die Polarisationen erklären; da sie nur die Anfangs- und Endbahn berücksichtigt, nicht aber die näheren Umstände des Überganges, verzichtet sie auf den Schwingungscharakter der Spektrallinien; ihr Ursprung aus der Vorstellung der Energiequanten steht mit der neueren Entwicklung der Quantentheorie im Widerspruch, welche nur mehr Wirkungsquanten kennt.

Um die Entscheidung zu treffen, ob mutmaßlich der Einwand 1 oder 2 für das negative Ergebnis unserer Untersuchung verantwortlich zu machen ist, werden wir uns am besten durch die Erfahrungen beim Starkeffekt leiten lassen. Hier wird die Bohrsche Frequenzgleichung ungeändert übernommen und der Einfluß des elektrischen Feldes auf die Art des Übergangs zwischen Anfangs- und Endbahn durchaus nicht in Rechnung gesetzt.

Andererseits aber wird das mechanische Problem der Anfangs- und Endbewegung streng gelöst und der Quantenansatz in solchen Koordinaten vorgenommen, die zur genauen Separierung der Jacobischen Differentialgleichung führen. Die nachträgliche Beschränkung auf die erste Potenz des elektrischen Feldes ist hier nur Sache der praktischen Ausrechnung, hat aber keinen prinzipiellen Einfluß auf Koordinatenwahl oder Quantenansatz.

Hiernach werden wir auch beim Zeemaneffekt geneigt sein, den Einwand 1 als maßgebend anzusehen. Es ergibt sich also als Hauptresultat unserer Untersuchung die Forderung: die für den Quantenansatz strenge richtigen Koordinaten durch genaue Integration der Bewegungsgleichungen zu ermitteln.

§ 9. Anhang über den Stark-Effekt.

Das Elektron (Ladung $-e$) befinde sich unter dem Einfluß des Wasserstoffkernes (Ladung $+e$) und eines homogenen elektrischen Feldes von der Stärke E und der Richtung x. Seine potentielle Energie ist

$$V = -\frac{e^2}{r} + eEx,\ r^2 = x^2 + \varrho^2,\ \varrho^2 = y^2 + z^2. \quad (1)$$

a) Stark-Effekt ohne Relativität.

Anwendung der Methode der komplexen Integration.

Mit Schwarzschild und Epstein führen wir parabolische Koordinaten ξ, η, φ ein durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y = \varrho\cos\varphi,\ z = \varrho\sin\varphi,\ x + i\varrho = \frac{1}{2}(\xi + i\eta)^2 \\ x = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2),\ \varrho = \xi\eta,\ r = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Das Linienelement wird

$$ds^2 = dx^2 + d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2 = (\xi^2 + \eta^2)(d\xi^2 + d\eta^2) + \xi^2\eta^2 d\varphi^2.$$

Daher die lebendige Kraft

$$T = \frac{m}{2}\left\{(\xi^2 + \eta^2)(\dot\xi^2 + \dot\eta^2) + \xi^2\eta^2\dot\varphi^2\right\}$$

oder, in den Impulsen

$$p_\xi = \frac{\partial T}{\partial \dot\xi},\ p_\eta = \frac{\partial T}{\partial \dot\eta},\ p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}$$

geschrieben

$$T = \frac{1}{2m(\xi^2 + \eta^2)}\left\{p_\xi^2 + p_\eta^2 + \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2}\right)p_\varphi^2\right\}. \quad (3)$$

Die potentielle Energie wird nach (1) und (2)

$$V = \frac{1}{2(\xi^2 + \eta^2)}\left\{-4e^2 + eE(\xi^4 - \eta^4)\right\}. \quad (4)$$

Daher lautet die Hamiltonsche Funktion: $H = T + V = W$:

$$H=\frac{1}{2m(\xi^2+\eta^2)}\left\{p_\xi^2+p_\eta^2+\left(\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{\eta^2}\right)p_\varphi^2 - 4mc^2+meE(\xi^4-\eta^4)\right\}$$

und die Jacobische Differentialgleichung:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{\eta^2}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = 2mW(\xi^2+\eta^2)+4mc^2-meE(\xi^4-\eta^4). \tag{5}$$

Ihre Integration ergibt

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi}=p_\varphi=\text{Konst.},\quad \frac{\partial S}{\partial \xi}=\sqrt{f_1(\xi)},\quad \frac{\partial S}{\partial \eta}=\sqrt{f_2(\eta)}\,. \tag{6}$$

$$f_1(\xi)=2mW\xi^2+2m(c^2+\beta)-meE\xi^4-\frac{p_\varphi^2}{\xi^2} \tag{7}$$

$$f_2(\eta)=2mW\eta^2+2m(c^2-\beta)+meE\eta^4-\frac{p_\varphi^2}{\eta^2}$$

β ist eine bei der Separation der Variabeln ξ η eingeführte Integrationskonstante.

Die Quantenbedingungen lauten in der Schreibweise der Gl. (1) § 6:

$$[S]_\xi=n_1h,\ [S]_\eta=n_2h,\ [S]_\varphi=n_3h. \tag{8}$$

Die Integration in $[S]_\varphi$ ist von 0 bis 2π zu erstrecken; die letzte Bedingung (8) liefert daher

$$p_\varphi=\frac{n_3h}{2\pi}.$$

Die Integrationen in $[S]_\xi$ und $[S]_\eta$ erstrecken sich hin und her zwischen ξ_1 ξ_2 bzw. η_1 η_2, wo ξ_1 ξ_2 bzw. η_1 η_2 diejenigen beiden positiven Wurzeln von $f_1(\xi)=0$ bzw. $f_2(\eta)=0$ sind, die für $E=0$ nicht ∞ werden. Die beiden ersten Gl. (8) lassen sich daher zusammenfassend schreiben:

$$\oint\sqrt{A+2\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}+Dx}\,dx=2nh. \tag{9}$$

Hier ist das eine Mal $\xi^2=x$, das andere Mal $\eta^2=x$ gesetzt und berücksichtigt, daß dann $d\xi/\xi$ und $d\eta/\eta$ gleich $dx/2x$ wird, wobei der Faktor 2 nach rechts gesetzt wurde und n die Zahl n_1 bzw. n_2 vertritt. Die Koeffizienten A, B, C, D bedeuten das einemal

$$A_1=2mW,\ B_1=m(c^2+\beta),\ C_1=-\left(\frac{n_3h}{2\pi}\right)^2,\quad D_1=-meE. \tag{9a}$$

das anderemal

$$A_2=2mW,\ B_2=m(c^2-\beta),\ C_2=-\left(\frac{n_3h}{2\pi}\right)^2,\quad D_2=+meE. \tag{9b}$$

Die Integration ist in der komplexen x-Ebene ein Umgang um diejenigen beiden Verzweigungspunkte x_1 x_2 des Radikanden von (9), die mit $D=0$ nicht ins Unendliche rücken. Außer diesen beiden Verzweigungspunkten gibt es noch zwei weitere, x_3 und ∞, so daß (9) ein vollständiges elliptisches Integral darstellt.

Nachdem so der Quantenansatz an die genaue Integration der Bewegungsgleichungen angeschlossen ist (vgl. den Schluß des vorigen Paragraphen), darf man für alle praktischen Zwecke das elliptische Integral nach Potenzen von D entwickeln, um es auf elementare Integrale zurückzuführen. Man schreibe:

$$\sqrt{A+2\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}+Dx}=\sqrt{A+2\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}}+\frac{1}{2}\frac{Dx}{\sqrt{A+2\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}}}.$$

Dann ergibt sich statt (9)

$$J+\frac{D}{2}J'=2nh. \tag{10}$$

J und J' haben genau dieselbe Bedeutung wie in § 7 Gl. (1) und (5). Dabei ist folgender Umstand für unsere Rechnungsmethode charakteristisch. Die Integration in (9) ist ursprünglich um die Verzweigungspunkte x_1 x_2 des unverkürzten Radikanden in (9) zu erstrecken. Diese Verzweigungspunkte stimmen nicht genau überein mit den Verzweigungspunkten, sagen wir x_1^1, x_2^1, des verkürzten Radikanden $A+\frac{2B}{x}+\frac{C}{x^2}$. Jedenfalls aber kann der ursprüngliche Integrationsweg so gewählt werden, daß er auch die Verzweigungspunkte $x^1{}_1$, $x^1{}_2$ umschließt. Nach Vornahme unserer Potenzentwicklung ist er daher für die weitere Behandlung der Integrale J und J' völlig äquivalent mit demjenigen Integrationswege, der in § 7 zugrunde gelegt wurde. Es ist daher bei unserer Methode gar nicht nötig, die Verschiedenheit der Wurzeln $x^1{}_1$, $x^1{}_2$ einerseits und x_1, x_2 andrerseits zu berücksichtigen. Nicht so, wenn man an den ursprünglichen reellen Integralen festhält und auf die Freiheit in der Verfügung über den Integrationsweg, die die komplexe Auffassung mit sich bringt, verzichtet. Dementsprechend bemerkt Epstein[1]) daß man beim Übergang zur „zweiten Näherung“ (d. h. bei Berücksichtigung der ersten Potenz der Feldstärke E) auf die abweichenden Werte der Integrationsgrenzen (bei Epstein u_1, u_2) zu achten habe, daß diese aber nur „Effekte zweiter Ordnung“ mit sich bringen. Dagegen zeigt unsere Methode unmittelbar, daß diese Effekte in jeder Ordnung exakt verschwinden.

Setzt man nun aus § 7 Gl. (4) und (6) die

1) Ann. d. Phys. 50, 507, 1916.

Werte von J und J' in (10) ein, so entsteht

$$\sqrt{C}-\frac{B}{\sqrt{A}}-\frac{D}{4A^{3/2}}\left(\frac{3B^2}{A}-C\right)=\frac{nhi}{\pi}. \quad (11)$$

Diese Gleichung ist in A, B, C, D und n mit den Indizes 1 und 2 zu versehen und vertritt daher eigentlich zwei Gleichungen. Wir eliminieren aus ihnen die in B_1 und B_2 vorkommende Integrationskonstante β (vgl. Gl. (9a) und (9b)), da wir uns für sie nicht interessieren, und berechnen zu dem Ende zunächst B aus (11). Es ergibt sich

$$B\left(1+\frac{3DB}{4A^2}\right)=\sqrt{A}\left(\sqrt{C}-\frac{nhi}{\pi}\right)+\frac{CD}{4A}. \quad (12)$$

In dem wegen D kleinen Gliede linker Hand kann man für B den Näherungswert $B=\sqrt{A}\,K$ einführen, wo zur Abkürzung geschrieben wird

$$K=\sqrt{C}-\frac{nhi}{\pi}. \quad (13)$$

Dann folgt aus (12)

$$B=\sqrt{A}K+\frac{CD}{4A}-\frac{3}{4}\frac{DK^2}{A}$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$\left.\begin{aligned}B_1&=\sqrt{A}K_1-\frac{meEC}{4A}+\frac{3}{4}\frac{meEK_1^2}{A}\\&=m(c^2+\beta)\end{aligned}\right|$$
$$\left.\begin{aligned}B_2&=\sqrt{A}K_2+\frac{meEC}{4A}-\frac{3}{4}\frac{meEK_2^2}{A}\\&=m(c^2-\beta)\end{aligned}\right| \quad (14)$$

Es unterscheiden sich nämlich nach (9a) und (9b) A_1, A_2 und C_1, C_2 nicht voneinander, weshalb für diese Größen die Buchstaben A und C beibehalten werden können. Die nur dem Vorzeichen nach verschiedenen Werte $\mp meE$ von D_1 und D_2 sind eingesetzt, ebenso die Werte von B_1 und B_2. K_1 und K_2 sind nach (13) verschieden wegen der verschiedenen Bedeutung von $n=n_1$ bzw. $n=n_2$.

Nehmen wir die halbe Summe der beiden Gl. (14)

$$\frac{K_1+K_2}{2}\left(\sqrt{A}+\frac{3}{4}\frac{meE}{A}\left(K_1-K_2\right)\right)=mc^2, \quad (15)$$

so ist die beabsichtigte Elimination von β erreicht und wir können zur Berechnung von $A=2mW$ übergehen. In erster Näherung folgt

$$A=\left(\frac{2mc^2}{K_1+K_2}\right)^2,$$

welchen Wert wir in dem mit E behafteten kleinen Gliede links eintragen können. Somit

$$\sqrt{A}=\frac{2mc^2}{K_1+K_2}-\frac{3}{4}\frac{meE}{(2mc^2)^2}(K_1-K_2)(K_2+K_1)^2,$$
$$A=\frac{(2mc^2)^2}{(K_1+K_2)^2}-\frac{3}{4}\frac{E}{e}(K_1-K_2)(K_2+K_1),$$
$$W=\frac{2mc^4}{(K_1+K_2)^2}-\frac{3}{8}\frac{E}{me}(K_1-K_2)(K_2+K_1). \quad (16)$$

Nach (13) ist aber

$$K_1-K_2=\frac{hi}{\pi}(n_2-n_1),$$
$$K_2+K_1=2\sqrt{C}-\frac{hi}{\pi}(n_1+n_2)$$

und nach (9a) oder (9b) mit Rücksicht auf die Vorzeichenbestimmung von $\sqrt{C}$ bei Gl. (2) in § 7

$$\sqrt{C}=-\frac{n_3hi}{2\pi},$$

also

$$K_1+K_2=-\frac{hi}{\pi}(n_1+n_2+n_3),(K_1-K_2)(K_2+K_1)$$
$$=\frac{h^2}{\pi^2}(n_2-n_1)(n_1+n_2+n_3). \quad (17)$$

Setzt man dieses in (16) ein, so ergibt sich als endgültiges Resultat

$$-W=\frac{2\pi^2mc^4h^2}{(n_1+n_2+n_3)^2}\cdot$$
$$+\frac{3h^2E}{8\pi^2mc}(n_2-n_1)(n_1+n_2+n_3). \quad (18)$$

Dies stimmt genau mit Epsteins Gl. (62) überein und unterscheidet sich von Schwarzschilds Resultat nur unwesentlich aus Gründen, die Epstein inzwischen aufgeklärt hat. Wie man weiß, liegt in dem zweiten Term rechts in Gl. (18) die Erklärung für die ganze Mannigfaltigkeit der Erscheinungen, die Stark bei den verschiedenen Balmer-Linien entdeckt hat. Man darf wohl ohne Übertreibung sagen, daß die formale Erklärung dieser Erscheinungen nicht einfacher gegeben werden kann, als in den vorstehenden Zeilen geschehen.

b) Stark-Effekt mit Relativität.

Die relativistische Bewegungsgleichung für die x-Komponente lautet mit dem Werte (1) für die potentielle Energie V:

$$\frac{dp_x}{dt}=-\frac{\partial V}{\partial x},\quad p_x=m\frac{dx}{dt}=m_0\frac{dx}{d\tau}, \quad (19)$$

wo τ die Eigenzeit ist. Die Energiegleichung liefert ähnlich wie in § 4, Gl. (14) für $\dot{\tau}=d\tau/dt=\sqrt{1-\beta^2}$:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{m_0 c^2}(W - V) + 1. \qquad (20)$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit der vorhergehenden erhält man ähnlich wie in § 5:

$$\frac{dp_x}{d\tau} = -\frac{\partial V}{\partial x}\left(1 + \frac{W}{m_0 c^2}\right) + \frac{1}{m_0 c^2} V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[V\left(1 + \frac{W}{m_0 c^2}\right) - \frac{V^2}{2 m_0 c^2}\right]. \qquad (21)$$

Führt man also eine Hamiltonsche Funktion ein

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2 m_0} + V\left(1 + \frac{W}{m_0 c^2}\right) - \frac{V^2}{2 m_0 c^2}, \qquad (22)$$

so lassen sich die Bewegungsgleichungen nach (19) und (21) in die folgende kanonische Form bringen:

$$\frac{dp_x}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \ldots, \frac{dx}{d\tau} = +\frac{\partial H}{\partial p_x}, \ldots \qquad (23)$$

Die Konstante der Hamiltonschen Funktion ist nicht gleich der Energiekonstanten W sondern, wie man nach der Methode des § 5 leicht nachrechnet, gleich

$$H_0 = W\left(1 + \frac{W}{2 m_0 c^2}\right). \qquad (24)$$

Will man andrerseits in (22) die gewöhnliche Zeit t statt τ benutzen, so muß man statt (23) und (24) schreiben:

$$H = m_0 c^2\left(\sqrt{1 + \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{m_0^2 c^2}} - 1\right) + V, \qquad (23a)$$

$$H_0 = W \qquad (24a)$$

Aus $H = H_0$ folgt nach (23) 24) ebenso wie nach (23a), (24a) die Jacobische partielle Differentialgleichung unseres Problems zu

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = 2 m_0 W\left(1 + \frac{W}{2 m_0 c^2}\right) - 2 m_0 V\left(1 + \frac{W}{m_0 c^2}\right) + \frac{V^2}{c^2}.$$

Diese Gleichung wird aber durch Einführung der parabolischen Koordinaten ξ, η, φ nicht mehr in eine separierbare Form übergeführt. Nach den Rechnungen vom Anfange dieses Paragraphen ergibt sich nämlich:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = 2 m_0 W\left(1 + \frac{W}{2 m_0 c^2}\right)(\xi^2 + \eta^2) + m_0\left(1 + \frac{W}{m_0 c^2}\right)(4 e^2 - e E(\xi^4 - \eta^4)) + \frac{(4 e^2 - e E(\xi^4 - \eta^4))^2}{4 c^2 (\xi^2 + \eta^2)}.$$

Hier steht das letzte Glied, welches aus $V^2 e^2$ entstanden ist, der Separierung der Variabeln ξ η im Wege. Infolgedessen können wir diese Variabeln nicht mehr als die für den relativistischen Stark-Effekt richtigen anerkennen. In den richtigen Koordinaten angesetzt, mögen die Quantenbedingungen wesentlich und unstetig von den obigen Gl. (8) abweichen, ähnlich wie dies am Schluß des vorigen Paragraphen für die richtigen und die scheinbar angenähert richtigen Koordinaten beim Zeeman-Effekt vermutet wurde.

Offenbar wird es auch im Gebiete des Stark-Effektes ein Analogon zu dem magnetischen Paschen-Back-Effekte geben. Die ohne Rücksicht auf die Multiplizität gewonnene, nicht relativistische Formel (18) hat sich bei „starken" Feldern vollkommen bewährt. Dieselbe Formel kann aber bei „schwachen" Feldern gewiß nicht genau gelten, da sie mit $E = 0$ nicht den Übergang in die wirkliche Feinstruktur der Wasserstofflinien, sondern in die gröbere Balmersche Formel für einfache Linien vermittelt. Man wird hier offenbar ebenso wie beim Zeeman-Effekt sagen können: Die Feinstruktur wird gegenstandslos für elektrische Felder von solcher Stärke, daß ihre Aufspaltung groß ist gegenüber den Komponentenabständen der ursprünglichen Feinstruktur. Gegenüber solchen „starken Feldern" verhalten sich die Wasserstofflinien wie einfache Linien. Dagegen muß sich bei „schwachen" Feldern, deren Aufspaltung kleiner ist als die Feinstruktur, die letztere bemerklich machen.

Zusatz bei der Korrektur. Eine ganz elementare Betrachtung bestätigt die Ergebnisse der allgemeinen Behandlung des Zeeman-Effektes und gestattet einen Einblick in den Ursprung der magnetischen Aufspaltung.

Wir beschränken uns auf Kreisbahnen in der Ebene senkrecht zum Felde H. a sei der Radius des Kreises, w die Winkelgeschwindigkeit des Elektrons. Die magnetische Energie des unserer Kreisbahn äquivalenten Elementarmagneten im magnetischen Felde ist

$$W_m = H \frac{a^2 w}{2} \frac{e}{c}.$$

Mit Rücksicht auf die Quantenbedingung $m a^2 w = \frac{n h}{2\pi}$ und die frühere Abkürzung $f = \frac{e}{m} \frac{H}{c}$ wird dieses

$$W_m = \frac{f}{4\pi} n h.$$

Rechnet man andererseits die kinetische und potentielle elektrische Energie aus, auf Grund

derselben Quantenbedingung und der durch das Feld abgeänderten dynamischen Bedingung, so ergibt sich als Summe beider bis auf Glieder mit f^2 derselbe Wert wie ohne Feld. Daraus erkennt man:

Die magnetische Aufspaltung rührt von der magnetischen Energie W_m her (paramagnetischer Effekt). Die Änderung der Kreisbahn durch das Feld ruft nur eine Korrektion zweiter Ordnung hervor (einen diamagnetischen Effekt). Die frühere Rechnung, bei welcher in der Differentialgleichung das Glied mit f^2 vernachlässigt wurde, ist exakt in dem Gliede erster Ordnung. Dasselbe gilt auch im relativistischen Falle. Die am Ende von § 8 ins Auge gefaßte Möglichkeit, daß das Auftreten überzähliger Linien und der Widerspruch gegen den Paschen-Back-Effekt von der ungenauen Integration der partiellen Differentialgleichung herrühren möchte, ist daher fallen zu lassen.

(Eingegangen 7. September 1916.)

Quantenhypothese und Zeeman-Effekt[1].

Von P. Debye.

Nachdem durch die kurzen Andeutungen von P. Epstein[2] und insbesondere durch die schöne Arbeit von K. Schwarzschild[3] sichergestellt ist, daß die Verknüpfung von Quantentheorie und Bohrschem Modell eine Erklärung des Stark-Effekts liefert, sehen wir uns in Hinsicht auf den um Vieles älteren Zeeman-Effekt einer sehr unbefriedigenden Sachlage gegenübergestellt. Tatsächlich haben ja quasielastisch schwingende Elektronen als Energiequellen für die Serienlinien in den Bohrschen Ansätzen keinen Platz mehr und doch operieren alle bis jetzt erfolgreichen Theorien des Zeeman-Effekts von H. A. Lorentz bis W. Voigt mit diesem Bilde. Im Folgenden möchte ich einige Überlegungen vorbringen, welche den Anschluß des Zeeman-Effekts an die Quantentheorie anbahnen sollen.

§ 1. Die Grundlagen des Quantenansatzes.

Zunächst wollen wir in diesem Paragraphen versuchen, in engem Anschluß an Schwarzschild den Quantenansatz auf eine möglichst durchsichtige Form zu bringen und von allen unnötigen Zutaten zu befreien[4].

Zugrunde gelegt sei ein „bedingt periodisches" System, so definiert wie das z. B. bei L. Charlier geschieht[1].

Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung für S sei also gelöst und man habe gefunden, daß S sich in der Form

$$S = X_1 + \cdots + X_i + \cdots + X_n - a_1 t \quad (1)$$

darstellen läßt, wobei $x_1, x_2 \ldots x_n$ die Variabelen bedeuten und X_1 nur Funktion von x_1, X_2 nur Funktion von x_2, usw. sind.

Das ist die erste Forderung, die an ein bedingt periodisches System gestellt wird.

Die zweite Forderung lautet mathematisch eingekleidet: die Funktionen X erscheinen als Integrale, welche die Eigenschaft besitzen, daß ihre obere Grenze eine periodische Funktion des Integralwerts ist. Ein Integral von der Form

$$X = \int^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

wäre ein einfaches Beispiel für ein solches Verhalten, da mit stetig zunehmendem X die obere Grenze x zwischen den Werten $-a$ und $+a$ hin- und herpendelt. Gleich von vornherein möge bemerkt werden (mit Rücksicht auf die Beschränkung, welche den Systemen durch die obigen Forderungen auferlegt werden), daß alle Systeme, auf welche bis jetzt die Quantentheorie angewendet wurde, bedingt periodische sind.

Bekanntlich ist die Aufgabe die Bewegung des Systems zu finden durch (1) völlig gelöst, wenn dieser Ausdruck so viele beliebige Integrationskonstanten α enthält, als das System Freiheitsgrade besitzt. Die Bewegungsgleichungen bekommt man, indem man nach jedem α partiell differenziert und das Resultat einer zweiten Reihe beliebiger Konstanten β gleichsetzt, in der Form

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1},\ \beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}, \ldots, \beta_n = \frac{\partial S}{\partial \alpha_n},$$

für ein System von n Freiheitsgraden. Dabei ist die Anzahl Freiheitsgrade so definiert, daß einem linearen Oszillator z. B. ein Freiheitsgrad zuerkannt wird.

In der Mechanik nun wird bewiesen, daß man die zu den Koordinaten $x_1, \ldots x_i, \ldots x_n$ gehörigen Impulse $\xi_1, \ldots \xi_i, \ldots \xi_n$ bekommt, indem S partiell nach x differenziert wird, so daß

$$\xi_1 = \frac{\partial S}{\partial x_1}, \ \ldots\ \xi_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \ \ldots\ \xi_n = \frac{\partial S}{\partial x_n}.$$

1) Nach einer am 3. Juni 1916 der Göttinger Ges. d. Wiss. vorgelegten Notiz.
2) Diese Zeitschr. **17**, 148, 1916.
3) Sitz.-Ber. d. Berl. Akad. 1916, S. 548.
4) In der ausführlichen Bearbeitung (Ann. d. Phys. **50**, 489, 1916) seiner oben zitierten Notiz hat inzwischen P. Epstein dieselben Prinzipien, welche hier befürwortet werden, zur Grundlage seiner Theorie gemacht.

1) C. V. L. Charlier, Mechanik des Himmels I; Leipzig 1902, S. 97.

In dem durch (1) dargestellten Falle wird also:

$$\xi_1 = \frac{dX_1}{dx_1}, \quad \ldots \quad \xi_i = \frac{dX_i}{dx_i}, \quad \ldots \quad \xi_n = \frac{dX_n}{dx_n}, \tag{2}$$

oder anders ausgedrückt

$$X_1 = \int^{x_1} \xi_1 \, dx_1, \quad \ldots \quad X_i = \int^{x_i} \xi_i \, dx_i, \quad \ldots \quad X_n = \int^{x_n} \xi_n \, dx_n. \tag{2'}$$

Nach dieser Bemerkung ist die Einführung der Quantenhypothese in Analogie mit dem bei einem System von einem Freiheitsgrad befürworteten Verfahren unmittelbar möglich.

In diesem Spezialfalle nämlich hat man in der Koordinaten-Impuls-Ebene die Bahnkurve zu zeichnen, welche hier durch den Energiesatz ohne weiteres gegeben ist. Die quantentheoretisch möglichen Bahnen sollen dann diejenigen sein, deren Flächeninhalt ein ganzzahliges Vielfaches von h ist. Da aber dieser Flächeninhalt durch das Integral

$$\int \xi \, dx$$

dargestellt wird, so sieht man, daß die Analogie konsequent durchgeführt wird, wenn wir von jedem der Integrale (2') verlangen, daß es einem ganzzahligen Vielfachen von h gleichzusetzen ist, um die Quantenbahnen zu definieren[1]). Dem Umstande entsprechend, daß beim einfachen System die Integration über die geschlossene Bahnkurve zu erstrecken ist, wird man dabei im allgemeinen Falle zu verlangen haben, daß jedes der Integrale von (2') über eine ganze Periode zu nehmen ist.

So kommt man zusammenfassend zu folgender Formulierung des Quantenansatzes:

Hat man für ein bedingt periodisches System bei Einführung passend gewählter Variabelen die Hauptfunktion in der Form

$$S = X_1 + \cdots + X_i + \cdots + X_n - \alpha_1 t \tag{3}$$

bestimmt, dann sind quantentheoretisch nur solche Bewegungen möglich, für die

$$X_1^0 = m_1 h, \quad \ldots \quad X_i^0 = m_i h, \quad \ldots \quad X_n^0 = m_n h, \tag{4}$$

wobei $X_1^0, \ldots X_i^0, \ldots X_n^0$ die Werte bedeuten, welche die Funktionen $X_1, \ldots X_i, \ldots X_n$ aus (4) annehmen, wenn die Integration über eine ganze Periode erstreckt wird und $m_1, \ldots m_i, \ldots m_n$ ganze Zahlen sind.

In dieser Form wollen wir das Prinzip im Folgenden verwenden. Dabei stellen wir uns insofern auf einen anderen Standpunkt als Schwarzschild, als wir völlig absehen von einer nachträglichen Untersuchung, ob zwischen den Perioden, welche in den Bewegungsgleichungen auftreten (die man durch Differentiation nach den Konstanten α erhält), lineare Nullbeziehungen mit ganzzahligen Koeffizienten bestehen. Damit kommt die z. B. beim Resonator aus der Berücksichtigung jener Relationen folgende Trennung eines Resonators mit mathematisch gleichen Frequenzen von einem solchen mit beliebig wenig voneinander verschiedenen von selbst in Wegfall.

§ 2. Die partielle Differentialgleichung für die Hauptfunktion bei Anwesenheit eines Magnetfeldes.

Wir denken uns einen Kern von der Ladung E, um den ein Elektron von der Ladung ε sich bewegt, während zu gleicher Zeit in der z-Richtung eines rechtwinkeligen x, y, z-Koordinatensystems das homogene Magnetfeld von der Stärke H wirkt.

Eine erste Schwierigkeit tritt dadurch in Erscheinung, daß das Vorhandensein des Magnetfeldes zur Folge hat, daß das Problem zunächst aus dem Rahmen der gewöhnlichen mechanischen Probleme heraustritt. Tatsächlich ist die Hamiltonsche Funktion jetzt nicht wie gewöhnlich gleich der Differenz von kinetischer und potentieller Energie: $T - U$. Man überzeugt sich aber leicht, daß das Hamiltonsche Variationsprinzip zu den richtigen Bewegungsgleichungen führt, wenn zu $T - U$ noch das skalare Produkt

$$\frac{\varepsilon}{2c} (\mathfrak{H} [\mathfrak{r} \mathfrak{v}])$$

ergänzend hinzugefügt wird, wobei $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke, $\mathfrak{r}$ den als Vektor aufgefaßten Fahrstrahl von irgendeinem Aufpunkt aus zum Elektron hingezogen, $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit des Elektrons und c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Danach wird also im vorliegenden Falle die Lagrangesche Funktion

$$L = T - U + \frac{\varepsilon \mathsf{H}}{2c} (x\dot{y} - y\dot{x}). \tag{5}$$

Man zeigt nun mittels der aus der Mechanik bekannten Überlegungen, daß man an Stelle des Hamiltonschen Variationsprinzips

$$\delta \int L \, dt = 0$$

auch hier zu einer partiellen Differentialgleichung für die Hauptfunktion

$$S = \int_{t_0}^{t} L \, dt$$

(als Funktion von t, Anfangslagen und Endlagen des Systems) kommen kann. Es ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial S}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial S}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial S}{\partial z} = L, \tag{6}$$

1) Vgl. für die Formulierung bei einem System von einem Freiheitsgrad P. Debye in „Vorträge über die kinetische Theorie der Materie", Teubner 1913, S. 27.

die dadurch zu einer partiellen Differentialgleichung für

$$S = S(x, y, z, t)$$

wird, daß man die Beziehungen

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial S}{\partial z} \tag{7}$$

benutzt, um $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ durch die partiellen Differentialquotienten von S zu ersetzen. Setzt man die kinetische Energie

$$T = \frac{\mu}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

wobei μ die Masse des Elektrons ist, dann wird (6)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2\mu}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\} + \frac{\varepsilon \mathsf{H}}{2\mu c}\left(y\frac{\partial S}{\partial x} - x\frac{\partial S}{\partial y}\right) + \frac{\varepsilon^2 \mathsf{H}^2}{8\mu c^2}(x^2+y^2) + U = 0, \tag{6'}$$

da nach (7) die Beziehungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} \mu\dot{x} - \frac{\varepsilon \mathsf{H}}{2c}y &= \frac{\partial S}{\partial x}, \\ \mu\dot{y} + \frac{\varepsilon \mathsf{H}}{2c}x &= \frac{\partial S}{\partial y}, \\ \mu\dot{z} &= \frac{\partial S}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Bei Einführung von Polarkoordinaten r, ϑ, φ und nach Einsetzen des Wertes $\frac{\varepsilon \mathsf{E}}{r}$ für U, kommt statt (6'):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2\mu}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\} - \omega\frac{\partial S}{\partial \varphi} + \frac{\mu}{2}\omega^2 r^2\sin^2\vartheta + \frac{\varepsilon \mathsf{E}}{r} = 0, \tag{8}$$

wenn wir die Größe $\frac{\varepsilon \mathsf{H}}{2\mu c}$ von der Dimension einer Winkelgeschwindigkeit abkürzend mit ω bezeichnen.

Gelingt es diese Differentialgleichung in der in § 1 besprochenen Form zu lösen, dann halten wir uns für berechtigt auf diese Lösung den am Ende desselben Paragraphen formulierten Quantenansatz zur Auswahl der wirklichen physikalischen Bewegungen bei Anwesenheit eines Magnetfeldes anzuwenden.

So kommt ein Vorteil der obigen Formulierung gleich zur Geltung, der darin besteht, daß der Ansatz nicht auf rein mechanische Systeme beschränkt ist, sondern stets dann anwendbar ist, wenn die Lösung des Problems auf die Diskussion einer Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung zurückführbar ist. Diese Forderung aber ist stets dann erfüllt, wenn die Bewegungsgleichungen aus einem Hamiltonschen Variationsprinzip gefolgert werden können.

§ 3. Darstellung der Hauptfunktion.

Zunächst bemerken wir, daß es wegen der Kleinheit des Zeeman-Effekts offenbar möglich ist, das Glied mit ω^2 in (8) zu vernachlässigen. Allerdings würden, wie man leicht im Anschluß an das Folgende überlegt, Beobachtungen über zusätzliche Wirkungen proportional H^2 von besonderer Bedeutung für die Prüfung der Grundlagen sein. Wenn nun auch das einzige auf das Magnetfeld bezügliche Glied sich auf $-\omega\frac{\partial S}{\partial \varphi}$ reduziert hat, so ist doch eine Zerlegung von S in eine Summe von Funktionen der Einzelvariabelen nicht ohne weiteres möglich. Macht man aber die Substitution

$$\left.\begin{aligned} t' &= t, \\ r' &= r, \\ \vartheta' &= \vartheta, \\ \varphi' &= \varphi + \omega t, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

dann kommt statt (8):

$$\frac{\partial S}{\partial t'} + \frac{1}{2\mu}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r'}\right)^2 + \frac{1}{r'^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta'}\right)^2 + \frac{1}{r'^2\sin^2\vartheta'}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi'}\right)^2\right\} + \frac{\varepsilon \mathsf{E}}{r'} = 0 \tag{8'}$$

und diese Gleichung läßt eine solche Zerlegung ohne weiteres zu. Tatsächlich ist (8') genau die bekannte Hamilton-Jacobische Differentialgleichung für die Elektronenbewegung ohne Magnetfeld; die Substitution (9) beweist somit nur aufs neue die bekannte Tatsache, daß die Wirkung eines Magnetfeldes in erster Näherung besteht aus dem Hinzufügen einer Rotation der Winkelgeschwindigkeit $-\omega$ um die Feldrichtung als Achse.

Setzt man nunmehr

$$S = R' + \Theta' + \Phi' - \alpha'_1 t', \tag{10}$$

wobei R' nur von r', Θ' nur von ϑ' und Φ' nur von φ' abhängt, dann folgen für diese Funktionen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} r'^2\left(\frac{dR'}{dr'}\right)^2 + 2\mu\varepsilon\mathsf{E}r' - 2\mu\alpha'_1 r'^2 &= -\alpha'^2_2, \\ \sin^2\vartheta'\left(\frac{d\Theta'}{d\vartheta'}\right)^2 - \alpha'^2_2\sin^2\vartheta' &= -\alpha'^2_3, \\ \left(\frac{d\Phi'}{d\varphi'}\right)^2 &= \alpha'^2_3. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Die Größen α'_1, α'_2, α'_3 bedeuten die drei nötigen, willkürlichen Integrationskonstanten.

Die Gleichungen (11) lösen sich ohne weiteres und ergeben:

$$\left.\begin{aligned} R' &= \int\frac{dr'}{r'}\sqrt{2\mu\alpha'_1 r'^2 - 2\mu\varepsilon\mathsf{E}r' - \alpha'^2_2}, \\ \Theta' &= \int\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta'}\sqrt{\alpha'^2_2\sin^2\vartheta' - \alpha'^2_3}, \\ \Phi' &= \alpha'_3\int d\varphi'. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die Bewegung ist bedingt periodisch im Sinne der Ausführungen in § 1. Der Zentralabstand r kann sich nur zwischen zwei, zu den beiden Nullwerten des in R' unter der Wurzel vorkommenden quadratischen Ausdrucks gehörigen Abständen, bewegen, der Polabstand ϑ' liegt ebenfalls zwischen $\arcsin\frac{a'_3}{a'_2}$ und $\pi - \arcsin\frac{a'_3}{a'_2}$, nur der Winkel φ ist formal nicht begrenzt. Tatsächlich aber ist die Begrenzung auf das Intervall $0 - 2\pi$ gegeben, da ja die Lagen φ und $\varphi + 2\pi$ physikalisch gleichwertig sind.

Kehren wir jetzt zu unseren ursprünglichen Variabelen r, ϑ, φ mittels (9) zurück und nennen die statt R', Θ', Φ' auftretenden Funktionen nun R, Θ, Φ, dann wird

$$S = R + \Theta + \Phi - (a'_1 - a'_3\,\omega)\,t, \qquad (13)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} R &= \int \frac{dr}{r}\sqrt{2\mu a'_1 r_2 - 2\mu\varepsilon\mathsf{E}r - a'^2_2},\\ \Theta &= \int \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}\sqrt{a'^2_2\sin^2\vartheta - a'^2_3},\\ \Phi &= a'_3 f d\varphi. \end{aligned}\right| \qquad (13')$$

Mit Rücksicht auf das Folgende fassen wir schließlich noch die Integrationskonstanten anders zusammen, und zwar sei gesetzt:

$$\begin{aligned} a_1 &= a'_1 - \omega a'_3,\\ a_2 &= a'_2,\\ a_3 &= a'_3, \end{aligned}$$

dann wird

$$S = R + \Theta + \Phi - a_1 t, \qquad (14)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} R &= \int \frac{dr}{r}\sqrt{2\mu(a_1+\omega a_3)r^2 - 2\mu\varepsilon\mathsf{E}r - a_2^2},\\ \Theta &= \int \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}\sqrt{a_2^2\sin^2\vartheta - a_3^2},\\ \Phi &= a_3 f d\varphi. \end{aligned}\right| \qquad (14')$$

§ 4. Der Quantenansatz und seine unmittelbaren Folgen.

Nach der in § 1 gegebenen Vorschrift haben wir R^0, Θ^0, Φ^0 zu bestimmen, d. h. diejenigen Werte der in (14') vorkommenden Integrale zu berechnen für den Fall, daß dieselben über eine ganze Periode erstreckt werden.

Schreibt man

$$R^0 = 2\sqrt{-2\mu(a_1+\omega a_3)}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}\sqrt{-(r-r_1)(r-r_2)},$$

wobei r_1 und r_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$r^2 - \frac{\varepsilon\mathsf{E}}{a_1+\omega a_3}r - \frac{a_2^2}{2\mu(a_1+\omega a_3)} = 0$$

bedeuten, dann wird

$$r_1 = \frac{\varepsilon\mathsf{E}}{2(a_1+\omega a_3)}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{2(a_1+\omega a_3)a_2^2}{\mu\varepsilon^2\mathsf{E}^2}}\right],$$

$$r_2 = \frac{\varepsilon\mathsf{E}}{2(a_1+\omega a_3)}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2(a_1+\omega a_3)a_2^2}{\mu\varepsilon^2\mathsf{E}^2}}\right].$$

Nach bekannten Formeln wird andererseits

$$\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}\sqrt{-(r-r_1)(r-r_2)} = \pi\left[\frac{r_1+r_2}{2} - \sqrt{r_1 r_2}\right],$$

so daß für R^0 der Wert resultiert:

$$R^0 = 2\pi\left[\sqrt{\frac{\mu\varepsilon^2\mathsf{E}^2}{-2(a_1+\omega a_3)}} - a_2\right]. \qquad (15)$$

Ebenso findet man für

$$\Theta^0 = 2\int_{\vartheta = \arcsin\frac{a_3}{a_2}}^{\vartheta = \pi - \arcsin\frac{a_3}{a_2}}\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}\sqrt{a_2^2\sin^2\vartheta - a_3^2}$$

den Wert

$$\Theta^0 = 2\pi(a_2 - a_3), \qquad (15')$$

während

$$\Phi^0 = 2\pi a_3 \qquad (15'')$$

wird.

Nach § 1 lauten also die Quantenbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\frac{\mu\varepsilon^2\mathsf{E}^2}{-2(a_1+\omega a_3)}} - a_2 &= m_1\frac{h}{2\pi},\\ a_2 - a_3 &= m_2\frac{h}{2\pi},\\ a_3 &= m_3\frac{h}{2\pi}. \end{aligned}\right| \qquad (16)$$

Für die weitere Verwertung dieser Ansätze ist die Kenntnis der Energie notwendig, welche zu der entsprechenden Bewegung gehört. Nun beweist man aber auch an unsrer Funktion S, ebenso wie in der gewöhnlichen Mechanik, daß wenn S in der Form

$$S = f - a_1 t$$

dargestellt ist, wobei f nur Funktion der Lagenkoordinaten ist, die Integrationskonstante a_1 gleich der gesuchten Energie ist. Die Berechnung derselben läuft also darauf hinaus, aus den drei Gleichungen (16) die Größen a_2 und a_3 zu eliminieren. Führt man das aus, dann ergibt sich

$$-a_1 = \frac{2\pi^2\mu\varepsilon^2\mathsf{E}^2}{h^2}\frac{1}{(m_1+m_2+m_3)^2} + m_3\hbar\frac{\omega}{2\pi}. \qquad (17)$$

§ 5. Die nach dem Quantenansatz möglichen Frequenzen.

Betrachtet man den Übergang von einer durch die drei ganzen Zahlen m_1, m_2, m_3 charakterisierten Bahn zu einer anderen, welche durch

m'_1, m'_2, m'_3 charakterisiert sein möge und setzt nach Bohr zur Bestimmung der ausgesandten Schwingungszahl ν für die Differenz dieser Energien $h\nu$, dann erhält man

$$\nu = \frac{2\pi^2\mu\varepsilon^2\mathsf{E}^2}{h^2}\left[\frac{1}{(m_1+m_2+m_3)^2} - \frac{1}{(m'_1+m'_2+m'_3)^2}\right] + (m_3 - m'_3)\frac{\omega}{2\pi}. \quad (18)$$

Zunächst ist es vorteilhaft, die ganzen Zahlen m_1, m_2, m_3 durch andere zu ersetzen. Setzt man nämlich vorübergehend in (14′): $\omega = 0$ (d. h. man geht zum feldlosen Fall über), dann folgen aus (14) und (14′) nach allgemeinen Formeln für die zu ϑ und φ gehörigen Impulse $\overline{\vartheta}$ und $\overline{\varphi}$ die Werte

$$\left.\begin{aligned}\overline{\varphi} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = a_3,\\ \overline{\vartheta} &= \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} = \sqrt{a_2^2 - \frac{a_3^2}{\sin^2\vartheta}}.\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Andererseits hat das Impulsmoment $\mathfrak{M} = \mu[r v]$ des kreisenden Elektrons in r, ϑ, φ-Richtung die Komponenten

$$0, \quad -\frac{\overline{\varphi}}{\sin\vartheta}, \quad \overline{\vartheta},$$

da ja allgemein

$$\vartheta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = \mu r^2\dot{\vartheta}, \quad \overline{\varphi} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}.$$

Für $\mathfrak{M}^2$ berechnet man also mit Rücksicht auf (19):

$$\mathfrak{M}^2 = \frac{\overline{\varphi}^2}{\sin^2\vartheta} + \overline{\vartheta}^2 = a_2^2. \quad (20)$$

Nach (16) ist aber

$$a_2 = (m_2 + m_3)\frac{h}{2\pi},$$

so daß wir nach (20) für das Impulsmoment senkrecht zur Ebene der Planetenbewegung den Wert finden

$$\mathfrak{M} = a_2 = (m_2 - m_3)\frac{h}{2\pi}. \quad (21)$$

Mit Rücksicht auf die physikalische Bedeutung von $\mathfrak{M}$ führen wir an Stelle von m_1, m_2, m_3 neue ganze Zahlen n_1, n_2, n_3 ein durch den Ansatz:

$$\left.\begin{aligned}n_1 &= m_1,\\ n_2 &= m_2 + m_3,\\ n_3 &= m_3.\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Die Formel für die ausgesandten Frequenzen wird dann

$$\nu = \frac{2\pi^2\mu\varepsilon^2\mathsf{E}^2}{h^3}\left[\frac{1}{(n_1+n_2)^2} - \frac{1}{(n'_1+n'_2)^2}\right] + (n_3 - n'_3)\frac{\omega}{2\pi}. \quad (23)$$

Das erste Glied der Formel entspricht nun sowohl in seinem Bau wie auch in seiner Bedeutung genau dem Resultat der Sommerfeldschen Überlegung[1]). In der Bahnebene sind alle durch die ganzen Zahlen n_1 ihrer Exzentrizität nach charakterisierten Ellipsen mit allen durch die ganzen Zahlen n_2 charakterisierten Flächengeschwindigkeiten verknüpft, möglich. Das erste Glied entspricht also z. B. bei Wasserstoff, wo $\mathsf{E} = \varepsilon$ ist, allen Serien, von denen die Balmersche ein Spezialfall $(n_1 + n_2 = 2)$ ist.

Zu diesen Linien kommen nun durch die Wirkung des Magnetfeldes neue hinzu, welche aus den unbeeinflußten durch Verschiebungen hervorgehen, welche ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\omega}{2\pi}$ gleich sind.

Die Frequenz

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\varepsilon \mathsf{H}}{4\pi\mu c}$$

entspricht aber genau der normalen Aufspaltung beim Zeeman-Effekt. Derselbe erscheint also hier als Folge des allgemeinen Quantenansatzes in richtiger Größe. Das gewöhnliche Triplet entsteht, wenn man für n_3 und n'_3 nur die kleinsten ganzen Zahlen 0 und 1 zuläßt. Da weiterhin n_3 und n'_3 gänzlich unabhängig von der Wahl bezüglich n_1, n_2, n'_1 und n'_2 sind, so kann man (23) dahin deuten, daß der Zeeman-Effekt für alle Serienglieder denselben Wert hat.

Wenn ich nun das Obige zugunsten der Quantenüberlegungen buche, so muß ich andererseits hervorheben, daß die Theorie nicht vorhersehen läßt, warum man sich auf die Zahlen 0, 1 zu beschränken hat, wie es doch allem Anschein nach in Wirklichkeit der Fall ist. Auch bleiben hier, ebenso wie beim Stark-Effekt, die Polarisationsverhältnisse zunächst unberücksichtigt. Zwar würde es nicht schwer fallen dieselben nachträglich an Hand der Beobachtung mit den geometrischen Eigenschaften der stattfindenden Elektronenbewegung zu verknüpfen. Aber das ist meines Erachtens nur ein Notbehelf. Es scheint, daß ein wesentlicher Fortschritt hier nur zu erreichen ist, indem man für den zweiten Bohrschen Ansatz $h\nu$ = Energiedifferenz einen detailliierteren Ersatz substituiert, was ja sowieso auf diesem Gebiete als vorderhand ungelöste Aufgabe an der Spitze steht[2]).

1) Kgl. Bayer. Akad. d. Wiss. 1915, S. 425.

2) Die detailliertere Fassung muß sich indessen der Forderung, daß die Energiedifferenz genau gleich $h\nu$ zu setzen ist, stets unterordnen. Das scheint mir durch die Einsteinschen Überlegungen (Verhandl. d. D. Phys. Ges. 1916, S. 318) bewiesen zu sein.

Trotzdem scheint mir auch beim Zeeman-Effekt die an das Bohrsche Modell quantentheoretisch anknüpfende Überlegung den Vorzug zu verdienen, weil es nur so gelingt, gleichzeitig Zeeman-Effekt und Serienformel miteinander ursächlich zu verknüpfen.

Göttingen, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 7. September 1916.)

Die Feinstruktur wasserstoffähnlicher Spektren[1].

Von P. Debye.

Von Bohr rührt ein erster Versuch her die Veränderlichkeit der Elektronenmasse nutzbar zu machen bei der Erklärung der Struktur der Wasserstofflinien. Indessen ist es aber erst Sommerfeld[2]) kürzlich gelungen, eine weitgehende und befriedigende Theorie zu entwerfen, welche jenen Einfluß voll zur Geltung bringt.

Die Quantenansätze, welche Sommerfeld benutzt, sind nicht so durchsichtig, wie man das wünschen möchte. Andererseits gelingt es im Anschluß an die Schwarzschildsche Berechnung des Stark-Effektes ein Verfahren zu formulieren, das sehr allgemein ist und sehr wenig Willkür enthält. Es liegt nahe zu versuchen, zu welchen Resultaten das letztere Verfahren unter Einführung einer veränderlichen Elektronenmasse führt. Über einen solchen Versuch möchte ich im Folgenden berichten.

Es zeigt sich, daß es gelingt, eine geschlossene Formel für die Serienfrequenzen, auch unter Mitberücksichtigung der Veränderlichkeit der Elektronenmasse zu erhalten. Dieselbe ergibt ohne weiteres quantitativ richtige Resultate, z. B. bezüglich des Abstandes der H_α-Komponenten und damit nach Sommerfeld zugleich eine Berechnung beobachteter Linienabstände in den Röntgenserien[3]).

Der Vorteil der hier angewandten Prinzipien liegt besonders in der Zwangläufigkeit der darauf aufgebauten Rechnung. Auch die notwendige Rechenarbeit ist übrigens auf ein Mindestmaß zurückgeführt; sie geht nicht über das Maß hinaus, welches man bei angenommener Konstanz der Elektronenmasse aufzuwenden hat.

1) Nach einer am 24. Juni 1916 der Göttinger Ges. d. Wiss. vorgelegten Notiz.

2) Kgl. Bayer. Akad. d. Wiss. 1915, S. 425.

3) Sommerfeld, dem ich dieses Resultat mitteilte, schreibt mir in einem Briefe vom 21. Juni, daß die geschlossene Formel auch aus seinen Überlegungen folgt. Es genügt die Kombination einiger Gleichungen seiner eben zitierten Arbeit, sofern man die im Zusatz, S. 498, befürwortete Quantenforderung zugrunde legt.

§ 1. Die Differentialgleichung für die Hauptfunktion.

Bekanntlich ist es möglich, die Bewegungsgleichungen für das Elektron mit veränderlicher Masse aus einem Hamiltonschen Prinzip

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = 0$$

abzuleiten[1]), wenn man die Lagrangesche Funktion L definiert durch die Gleichung:

$$L = -\mu c^2 \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right) - U . \qquad (1)$$

Dabei ist μ die Ruhmasse und v die Geschwindigkeit des Elektrons, U ist seine potentielle Energie, während c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet.

Immer dann aber, wenn ein solches Hamiltonsches Prinzip besteht, kann die Frage auch gelöst werden mittels einer Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung für die Hauptfunktion

$$S = \int_{t_0}^{t} L\,dt,$$

wobei S in bekannter Weise als Funktion der Koordinatenwerte von Anfangslagen und Endlagen des Systems, sowie der Zeit zu betrachten ist. Für S findet man in üblicher Weise die Gleichung:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial S}{\partial x} + \cdots - L = 0, \qquad (2)$$

wobei $x, \ldots$ die Koordinaten, $\dot{x}, \ldots$ die zugehörigen Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}, \ldots$ bedeuten. Die Beziehung (2) wird zu der gesuchten Differentialgleichung durch Hinzunahme der Gleichungen:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \ldots\ldots, \qquad (3)$$

welche dazu dienen, in (1) die Geschwindigkeiten zu ersetzen durch die partiellen Differentialquotienten der Hauptfunktion S nach den Koordinaten.

Im speziellen, vorliegenden Falle erhält man, wenn zunächst rechtwinkelige Koordinaten x, y, z eingeführt werden um die Lage des Elektrons zu bestimmen, mit Rücksicht auf (3) aus (1):

$$\dot{x}\frac{\partial S}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial S}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial S}{\partial z} = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \dot{z}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}$$

$$= \mu c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right),$$

1) Vgl. z. B. H. A. Lorentz in „Das Relativitätsprinzip", Teubner 1913, S. 83.

wenn man

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

setzt.

Die linke Seite von (2) wird also:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mu c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) + U. \tag{4}$$

Andererseits folgt aus (3) und (1)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\mu c}\frac{\partial S}{\partial x} &= \frac{\dot{x}/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ \frac{1}{\mu c}\frac{\partial S}{\partial y} &= \frac{\dot{y}/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ \frac{1}{\mu c}\frac{\partial S}{\partial z} &= \frac{\dot{z}/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}\right|$$

und hieraus durch Quadrieren und Addieren:

$$\frac{v^2/c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\mu^2 c^2} \left| \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 \right|.$$

Mittels dieser letzten Gleichung kann man die in (4) vorkommende „kinetische Energie" des Elektrons

$$\mu c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

in den Differentialquotienten von S ausdrücken und erhält so die gesuchte Hamilton-Jacobische Differentialgleichung in der Form:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mu c^2 \left(\sqrt{1 + \frac{Q}{\mu^2 c^2}} - 1 \right) + U = 0, \tag{5}$$

wobei Q eine Abkürzung ist für den quadratischen Differentialausdruck:

$$Q = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2. \tag{5'}$$

Ist eine Lösung S dieser Differentialgleichung (5) gefunden mit so vielen Integrationskonstanten, als das System Freiheitsgrade besitzt, dann ist damit in bekannter Weise die Bewegung des Elektrons bestimmt.

§ 2. Die Lösung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung.

Um den Kern mit der Ladung E bewege sich das Elektron mit der Ladung ε. Da, wie die Rechnungen im früheren Falle zeigen, keine neuen Besonderheiten auftreten, wenn man das Beliebige der Lage der Elektronenbahn im Raume durch Beibehaltung dreier Koordinaten mit berücksichtigt, führen wir in der Bahnebene Polarkoordinaten r, φ ein. Dann wird

$$Q = \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 \tag{6}$$

und

$$U = \frac{\varepsilon E}{r}.$$

Setzt man nun in (5)

$$S = V - \alpha_1 t,$$

wobei V nur von r und φ abhängt, dann nimmt jene Gleichung folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} &\mu c^2 \left(\sqrt{1 + \frac{Q}{\mu^2 c^2}} - 1 \right) + \frac{\varepsilon E}{r} = \alpha_1 \\ \text{mit} \quad &Q = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2. \end{aligned}\right| \tag{7}$$

Man berechne nun zunächst aus der ersten Gleichung (7) den Differentialausdruck Q selbst. Dafür erhält man

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 \\ &= \mu^2 c^2 \left[\left(1 + \frac{\alpha_1 - \frac{\varepsilon E}{r}}{\mu c^2} \right)^2 - 1 \right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist nur von der Koordinate r abhängig, wir bezeichnen dieselbe vorübergehend mit ϱ, dann kommt statt (8):

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 = \varrho. \tag{9}$$

Diese Gleichung aber kann sofort gelöst werden, indem man den Ansatz macht

$$V = R + \alpha_2 \varphi,$$

wobei R nur von r abhängt und α_2 eine neue Integrationskonstante bedeutet. Tut man das, dann muß R der Gleichung:

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 = \varrho - \frac{\alpha_2^2}{r^2}$$

genügen und ergibt sich also zu

$$R = \int \frac{dr}{r} \sqrt{r^2 \varrho - \alpha_2^2}.$$

Das endgültige Resultat lautet demnach:

$$S = \int \frac{dr}{r} \sqrt{r^2 \varrho - \alpha_2^2} + \alpha_2 \int d\varphi - \alpha_1 t, \tag{10}$$

mit der Abkürzung

$$\varrho = \mu^2 c^2 \left[\left(1 + \frac{\alpha_1 - \frac{\varepsilon E}{r}}{\mu c^2} \right)^2 - 1 \right]. \tag{10'}$$

Aus dieser Darstellung sieht man sofort, daß der Bewegung des Elektrons auch jetzt

die Eigenschaften einer bedingt periodischen zukommen. Der in der Notiz über die Zeeman-Aufspaltung auseinandergesetzte Weg zur Einführung der Quanten ist demnach ohne weiteres anwendbar.

§ 3. Der Quantenansatz.

Nach dem zugrunde gelegten allgemeinen Prinzip lauten die Gleichungen für die Quantenauswahl:

$$\int_0 \frac{dr}{r}\sqrt{r^2\varrho - a_2^2} = m_1 h, \quad a_2\int_0 d\varphi = m_2 h. \tag{11}$$

Dabei ist h das Wirkungsquantum, m_1 und m_2 sind ganze Zahlen. Der an die Integrale angehängte Kreis soll bedeuten, daß dieselben in Übereinstimmung mit der Vorschrift über eine ganze Periode zu erstrecken sind.

Beachtet man den Ausdruck (10′) für ϱ, dann sieht man, daß unter dem Wurzelzeichen im ersten der Integrale (11) eine quadratische Funktion von r auftritt. Das ist auch bei der gewöhnlichen Planetenbahnberechnung der Fall, wo die Masse als konstant angesehen wird. Von dort können wir also alles ohne weiteres übertragen, wenn nur den Konstanten eine andere Bedeutung beigelegt wird.

Explicite wird:

$$r^2\varrho - a_2^2 = 2\mu a_1\left(1+\frac{\mu_1}{2\mu c^2}\right)r^2$$
$$-2\mu\varepsilon E\left(1+\frac{a_1}{\mu c^2}\right)r - a_2^2\left(1-\frac{\varepsilon^2E^2}{a_2^2c^2}\right);$$

für das erste Integral in (11) nach r können wir also schreiben:

$$\int_0 \frac{dr}{r}\sqrt{r^2\varrho - a_2^2} = 2\sqrt{-2\mu a_1\left(1+\frac{a_1}{2\mu c^2}\right)}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}$$
$$\sqrt{-\left(r^2 - \frac{\varepsilon E\,\frac{1+\frac{a_1}{\mu c^2}}{1+\frac{a_1}{2\mu c^2}}}{a_1}r - \frac{a_2^2}{2\mu a_1}\,\frac{1-\frac{\varepsilon^2E^2}{a_2^2c^2}}{1+\frac{a_1}{2\mu c^2}}\right)}, \tag{12}$$

wobei r_1 und r_2 die kleinere und die größere Wurzel des in der eckigen Klammer stehenden quadratischen Ausdruckes in r bedeuten. Schreiben wir für letzteren

$$(r-r_1)(r-r_2),$$

dann hat das gesuchte Integral die Form

$$\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}\sqrt{-(r-r_1)(r-r_2)}.$$

Ausgerechnet ergibt dasselbe:

$$\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}\sqrt{-(r-r_1)(r-r_2)} = \pi\left[\frac{r_1+r_2}{2} - \sqrt{r_1r_2}\right].$$

Im vorliegenden Falle ist aber nach (12):

$$\left.\begin{aligned} r_1+r_2 &= \frac{\varepsilon E\,\frac{1+\frac{a_1}{\mu c^2}}{1+\frac{a_1}{2\mu c^2}}}{a_1},\\ r_1r_2 &= -\frac{a_2^2}{2\mu a_1}\,\frac{1-\frac{\varepsilon^2E^2}{a_2^2c^2}}{1+\frac{a_1}{2\mu c^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

da die Größen $-(r_1+r_2)$ und r_1r_2 die Koeffizienten des unter der Wurzel stehenden quadratischen Ausdrucks nach r bilden müssen.

Fassen wir das Obige zusammen, dann erhalten wir schließlich

$$\int\frac{dr}{r}\sqrt{r^2\varrho - a_2^2} = 2\pi$$
$$\left\{\sqrt{-\frac{\mu\varepsilon^2E^2}{2a_1}\,\frac{\left(1+\frac{a_1}{\mu c^2}\right)^2}{1+\frac{a_1}{2\mu c^2}}} - a_2\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2E^2}{a_2^2c^2}}\right\};$$

nach der allgemeinen Vorschrift muß dieser Ausdruck gleich einer ganzen Zahl m_1 mal dem Wirkungsquantum h sein.

Der auf φ bezügliche Summand der Hauptfunktion erledigt sich sofort; man erhält dafür

$$a_2\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi a_2.$$

Dieser Wert ist gleich einer ganzen Zahl m_2 mal h zu setzen.

Die Quantenvorschrift verlangt also schließlich, daß von allen zunächst möglichen Bahnen nur diejenigen wirklich vorkommen, für welche die Integrationskonstanten a_1 und a_2 durch die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{-\frac{\mu\varepsilon^2E^2}{2a_1}\,\frac{\left(1+\frac{a_1}{\mu c^2}\right)^2}{1+\frac{a_1}{2\mu c^2}}} - a_2\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2E^2}{a_2^2c^2}} = m_1\frac{h}{2\pi},\\ &a_2 = m_2\frac{h}{2\pi} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

bestimmt sind.

§ 4. Die Serienformel.

Aus der Form (10) der Hauptfunktion S folgt, wie in der gewöhnlichen Mechanik, daß

α_1 die Gesamtenergie der Bewegung darstellt. Durch Elimination von α_2 in (14) erhält man zunächst:

$$\frac{\mu\varepsilon^2 E^2 \left(1-\frac{-\alpha_1}{\mu c^2}\right)^2}{-2\alpha_1 \left(1-\frac{-\alpha_1}{2\mu c^2}\right)} = \frac{h^2}{4\pi^2} M^2,$$

wenn M eine Abkürzung ist für

$$M = m_1 + \sqrt{m_2^2 - \frac{4\pi\varepsilon^2 E^2}{h^2 c^2}}.$$

Wir setzen jetzt noch

$$E = z\varepsilon,$$

dann ist z gleich der Zahl der elementaren Kernladungen. Für den unter der Wurzel vorkommenden Ausdruck $\frac{4\pi^2\varepsilon^2 E^2}{h^2 c^2}$ kann dann geschrieben werden

$$\frac{4\pi^2\varepsilon^2 E^2}{h^2 c^2} = z^2 \frac{2h}{\mu c^2} \frac{2\pi^2\mu\varepsilon^4}{h^3}.$$

Der Faktor $\frac{2\pi^2\mu\varepsilon^4}{h^3}$ ist aber die Rydbergsche Schwingungszahl, welche wir mit R bezeichnen wollen und welche den Wert $3{,}29 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{sec}}$ hat, entsprechend der gewöhnlich angegebenen Wellenzahl 109675. Dann wird

$$M = m_1 + \sqrt{m_2^2 - z^2 \frac{2hR}{\mu c^2}} \qquad (15)$$

und man sieht, wie die quantenmäßig bestimmte zur Rydbergschen Schwingungszahl R gehörige Energie hR in Wettbewerb tritt mit der für das Elektron charakteristischen Energie $\frac{\mu}{2} c^2$.

Auch die Bewegungsenergie $-\alpha_1$ wollen wir mit $\frac{\mu}{2} c^2$ vergleichen und dementsprechend das Verhältnis $\frac{-2\alpha_1}{\mu c^2}$ als gesucht ansehen. Dafür findet man dann die quadratische Gleichung:

$$\frac{1}{(-2\alpha_1/\mu c^2)} \frac{\left(1-\frac{1}{2}\frac{-2\alpha_1}{\mu c^2}\right)^2}{1-\frac{1}{4}\frac{-2\alpha_1}{\mu c^2}} = \frac{M^2}{z^2 \frac{2hR}{\mu c^2}}. \qquad (16)$$

Aufgelöst ergibt dieselbe

$$-\frac{2\alpha_1}{\mu c^2} = 2\left\{1 \pm \frac{1}{\sqrt{1+\frac{z^2}{M^2}\frac{3hR}{\mu c^2}}}\right\}. \qquad (17)$$

Zeichnet man nun eine Bewegung aus durch die ganzen Zahlen m_1, m_2 und definiert dazu das zugehörige M durch (15), während eine zweite Bewegung charakterisiert wird durch die ganzen Zahlen m'_1 m'_2, bzw. durch ein analog wie in (15) definiertes M', dann liefert der zweite Bohrsche Ansatz für die ausgestrahlte Schwingungszahl ν, nach (17) sofort das Resultat

$$-\frac{h\nu}{\mu c^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2hR}{\mu c^2}\frac{z^2}{M^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2hR}{\mu c^2}\frac{z^2}{M'^2}}}, \qquad (18)$$

wobei also

$$\left.\begin{aligned} M &= m_1 + \sqrt{m_2^2 - \frac{2hR}{\mu c^2} z^2}, \\ M' &= m'_1 + \sqrt{m'^2_2 - \frac{2hR}{\mu c^2} z^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (18')$$

Die Gleichungen (18) und (18') stellen die genaue Serienformel dar mit Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Elektronenmasse.

§ 5. Entwicklung. Abstand der H_α-Komponenten.

Die Größe $\frac{2hR}{\mu c^2}\frac{z^2}{M^2}$ ist eine kleine Zahl; in den allermeisten Fällen genügt deshalb eine Entwicklung nach Potenzen derselben.

In erster Näherung findet man

$$\frac{\nu}{z^2 R} = \frac{1}{(m_1+m_2)^2} - \frac{1}{(m'_1+m'_2)^2}, \qquad (19)$$

d. h. die der Balmerschen Serie entsprechende Formel, wie sie bei Vernachlässigung der Veränderlichkeit der Elektronenmasse nach Sommerfeld geschrieben werden soll.

In zweiter Näherung kommt

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{z^2 R} = {} & \left[\frac{1}{(m_1+m_2)^2}\left(1-\frac{3}{2}z^2\frac{hR}{\mu c^2}\frac{1}{(m_1+m_2)^2}\right)\right. \\ & \left. - \frac{1}{(m'_1+m'_2)^2}\left(1-\frac{3}{2}z^2\frac{hR}{\mu c^2}\frac{1}{(m'_1+m'_2)^2}\right)\right] \\ & + 2z^2\frac{hR}{\mu c^2}\left[\frac{1}{m_2(m_1+m_2)^3} - \frac{1}{m'_2(m'_1+m'_2)^3}\right]. \end{aligned} \qquad (19')$$

Die eckige Klammer allein ergibt ideelle Spektrallinien, welche den gewöhnlichen Linien der Balmerschen Formel entsprechen, sofern zu ihrer Darstellung nur die Summen m_1+m_2 und $m'_1+m'_2$ als ganze maßgebend sind, die allerdings aber durch die Wirkung der veränderlichen Elektronenmasse bei größeren Werten von z gegenüber der nach der ersten Näherung (19) berechneten Lage merklich nach Rot verschoben sind. Um diese ideellen Linien gruppieren sich die wirklichen Komponenten nach Maßgabe der in m_1+m_2 und $m'_1+m'_2$, ent-

haltenen Zahlen m_2 und m'_2, welche die Quantenzahlen des Impulsmomentes messen.

Die Diskussion der Komponentengruppierung würde gegenüber den Sommerfeldschen Betrachtungen nichts Neues ergeben, sofern wir uns seiner erweiterten Einschränkung der zulässigen Zahlen m_1, m'_1 und m_2, m'_2 anschließen.

Die wesentlich interessante Frage ist die, ob der in (19') enthaltene Zahlenfaktor 2 vor dem Gliede mit der geschweiften Klammer der Wirklichkeit entspricht. Das ist nun tatsächlich der Fall. Bei H_α, d. h.

$$z = 1,\ m_1 + m_2 = 2,\ m'_1 + m'_2 = 3,$$

sind, sofern man sich auf positive Zahlen beschränkt, 6 Komponenten möglich. Von diesen scheidet Sommerfeld durch seine Einschränkung 2 aus, so daß 4 übrig bleiben. Unter diesen 4 sind aber 2 besonders ausgezeichnet dadurch, daß bei ihrer Entstehung die der r-Richtung zugehörigen Quantenzahlen unverändert bleiben. Eine Übersicht über die Möglichkeiten gibt die folgende Tabelle

$2 \to 1;\ 1 \to 1$	$2 \to 0;\ 1 \to 2$
$1 \to 1;\ 2 \to 1$	$1 \to 0;\ 2 \to 2$
$0 \to 1;\ 3 \to 1$	$0 \to 0;\ 3 \to 2$

in der die auftretenden Quantenänderungen dargestellt sind. So stellt z. B. die erste Zahlenreihe $2 \to 1;\ 1 \to 1$ eine Komponente dar, bei deren Aussendung die der r-Richtung zugehörige Quantenzahl von 2 auf 1 fällt, während die der φ-Richtung zugehörige 1 erhalten bleibt.

Die oben genannten ausgezeichneten Linien sind nun

$$1 \to 1;\ 2 \to 1 \text{ und } 0 \to 0;\ 3 \to 2,$$

explicite:

$$m'_1 = 1,\ m_1 = 1,\ m'_2 = 2,\ m_2 = 1$$

und

$$m'_1 = 0,\ m_1 = 0,\ m'_2 = 3,\ m_2 = 2.$$

Die Abstände von der ideellen H_α-Linie sind nach (19')

$$2\frac{hR^2}{\mu c^2}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{54}\right)$$

und

$$2\frac{hR^2}{\mu c^2}\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{81}\right).$$

Setzt man

$$h = 6{,}55 \cdot 10^{-27},\quad R = 3{,}29 \cdot 10^{15},$$
$$\mu = 0{,}901 \cdot 10^{-27},\quad c = 3 \cdot 10^{10},$$

dann ergibt sich ihr gegenseitiger Abstand $\Delta\nu$ in Schwingungszahlen zu

$$\Delta\nu = 0{,}973 \cdot 10^{10}.$$

Andererseits folgt aus der mittleren Wellenlänge von H_α (6563 A^0) und dem gemessenen Abstand von 0,14 A^0 die experimentelle Schwingungsstrahlendifferenz

$$\Delta\nu = 0{,}977 \cdot 10^{10},$$

bzw. mit dem von anderen Beobachtern gefundenen Abstand 0,132 A^0 statt 0,14 A^0:

$$\Delta\nu = 0{,}920 \cdot 10^{10}.$$

Die Übereinstimmung ist so gut, daß sie besonders mit Rücksicht auf ihren von Sommerfeld hervorgehobenen Wert bei der Übertragung auf die Röntgenspektren eine starke Stütze für die Richtigkeit der hier befürworteten allgemeinen Formulierung abgibt[1]). Man hat also offenbar den richtigen Quantenansatz für den allgemeinen Fall der bedingt periodischen Bewegungen erreicht, wesentlich im Sinne der von M. Planck geforderten „Struktur des Phasenraums"[2]).

1) Macht man den Versuch die Theorie des Zeeman-Effektes so wie in der Notiz vom 3. Juni durchzuführen, aber jetzt mit Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Elektronenmasse, dann zerfällt jede der Komponenten, soweit ich sehe, regulär ohne einen Paschen-Back-Effekt zu zeigen. Man versteht dieses Resultat, wenn man bedenkt, daß die Aussendung der einzelnen Komponenten bei zeitlich verschiedenen physikalischen Prozessen vor sich geht, eine Koppelung also von vornherein nicht zu erwarten ist. Es darf indessen nicht unerwähnt bleiben, daß im Gegensatz zu diesem theoretischen Resultat P. Erochin in den Ann. d. Phys. **42**, 1054, 1913 aus seinen Beobachtungen auf die Existenz eines Paschen-Back-Effekts auch bei den Komponenten der Wasserstofflinien geschlossen hat.

2) Vgl. z. B. die Zusammenfassung der Planckschen Forderungen und Ansätze: Ann. d. Phys. **50**, 385, 1916.

Göttingen, Physikalisches Institut.

(Eingegangen 7. September 1916.)

Bemerkung über die Umladung von Kanalstrahlen.

Von J. Koenigsberger.

Die Herren J. Franck und G. Hertz erwähnen in ihrer Abhandlung „Über Kinetik von Elektronen und Ionen in Gasen"[1]) daß die Erfahrungen über Umladung von Kanalstrahlen dafür zu sprechen scheinen, daß chemische Kräfte bei der Ionisation durch positive Ionen eine Rolle spielen. Auf Grund eigener Versuche bin ich bezüglich der Umladung früher[2]) zu der entgegengesetzten Ansicht gekommen.

1) J. Franck u. G. Hertz, diese Zeitschr. **17**, 415, 1916.

2) Diese Zeitschr. **12**, 1090, 1911 u. Ann. d. Phys. **37**, 161, 1912.

Folgende Gründe sprechen gegen die Annahme einer elektrochemischen Affinitätswirkung bei der Umladung von Kanalstrahlen.

1. Der elektropositive Wasserstoff und der elektronegative Sauerstoff geben beide sowohl positive wie negative Atomkanalstrahlen, obgleich Wasserstoffatom mit negativer Ladung bisher elektrochemisch unbekannt, Sauerstoff mit positiver Ladung selten ist. Die Bedingungen, unter denen man negativen Sauerstoff und negativen Wasserstoff im Kanalstrahl erhält, sind nahezu dieselben.

2. Stickstoff, der chemisch keineswegs ausgeprägt elektropositiv sondern auch elektronegativ ist, erscheint im Gegensatz zu Wasserstoff in den Kanalstrahlen nur positiv geladen.

3. Das chemisch neutrale Helium ist nur in elektrisch-positivem und neutralem Zustande beobachtet worden.

4. Das elektronegative Jod lädt sich im Kanalstrahl leichter positiv als negativ. Man kann sogar leichter negativen *H*-Kanalstrahl als negativen *J*-Kanalstrahl erhalten.

5. Die Berechnung der Umladungs-Weglängen positiver und neutraler Kanalstrahlatome zeigte, daß ein spezifischer Unterschied zwischen *H, He, O* nicht besteht. Man kann ferner diese Weglängen in erster Annäherung gut durch eine Formel darstellen, die lediglich eine Funktion der Geschwindigkeit mit zwei für die drei Atome gleichen Konstanten ist.

Bei der Umladung der Kanalstrahlen sind also Stabilitätsbedingungen für das Rutherford-Bohrsche Atommodell maßgebend, die zum Teil anderer Art sind als die bei der chemischen Bindung zweier oder mehrerer Kerne.

Freiburg i. B., September 1916.

(Eingegangen 11. September 1916.)

BESPRECHUNGEN.

I. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung nach den Bedürfnissen der technischen Mechanik und Elektrizitätslehre. gr. 8°. XIV u. 386 S. mit 48 Textabbildungen. Stuttgart, Konrad Wittwer. 1916. Preis geh. M. 14.—, geb. M. 16.—.

Wenn man die Vektorrechnung nicht nur zum Lesen und Verstehen wissenschaftlicher Arbeiten kennen zu lernen wünscht, sondern sie sich wirklich zu eigen machen muß, um damit zu arbeiten, und zwar mit den Symbolen selbst, um ihres mathematisch-physikalischen Inhalts willen zu rechnen imstande sein will, dann empfindet man den Mangel eines geeigneten Lehrbuches. Denn will man sich den weitgehenden Anforderungen der Physik und Technik gemäß auch die „höheren" Methoden aneignen, so muß man wohl oder übel schon eine ganze Anzahl von Originalwerken lesen, in denen bekanntlich einmal die Darstellungen gänzlich verschieden sind und in denen auch das philosophische Moment zum Teil eine Rolle spielt, welche für ein Erwerben rechnerischer Fähigkeiten mehr hemmend als fördernd wirkt. Deshalb ist es dem jetzigen Stande dieser zwar sehr reizvollen Entwicklung der Methoden entsprechend zweckmäßig, zuerst ein — natürlich genügend umfassendes — Lehrbuch durchzuarbeiten und erst mit dieser Grundlage die Spezialwerke zu studieren. Ich glaube, daß viele Physiker nur deshalb nicht mit Vektoren arbeiten, weil sie kein geeignetes Lehrbuch fanden. — Von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet ist das vorliegende, auf Veranlassung von Fritz Emde entstandene Lehrbuch von Spielrein, gerade das Richtige. —

Das anfängliche Ziel des Verfassers ist es gewesen, den Studierenden der Ingenieurwissenschaften eine Grundlage zu geben; indessen ist der Stoff weit über dieses Ziel ausgedehnt worden und es wird auch speziell für den Physiker als ein hervorragendes Mittel zur Einarbeitung bezeichnet werden müssen. Charakteristisch an dem Werke ist die Art, in der mit besonderem Lehrgeschicke der Leser zum Durcharbeiten des Stoffes gezwungen wird. Eine persönliche Gewandtheit in der Behandlung der Methoden ist unerläßlich — deshalb sind hier wichtige und schwierige Sätze, die man in anderen Büchern einfach vorgetragen findet, in die Form von Aufgaben gekleidet, deren Lösungen in besonderen, den drei Abschnitten, in die das Werk sich gliedert, folgenden Teilen gegeben werden. (Diese Lösungen machen etwa ein Viertel des gesamten Umfanges aus.) Der Verfasser hat es sich sehr angelegen sein lassen, durch saubere Ausdrucksweise dem Leser „unnötige" Schwierigkeiten aus dem Wege zu räumen und die Gedankenarbeit ganz dem Kern der Sache zukommen zu lassen. Gerade hier, wo die Bezeichnungen wegen der Neuheit und dem noch Entwickeltwerden der Methoden oft durchaus nicht einfach und selbstverständlich sind, ist es recht angenehm, diese „Äußerlichkeiten" mit taktvoller Sorgfalt behandelt zu finden.

Teil I, Vektoralgebra, zerfällt in „elementare Vektoroperationen", „besondere Vektoren" und „Bezeichnungen der Vektorrechnung". Aus Kapitel 1, dessen Schluß erst die Darstellung in rechtwinkligen Koordinaten bringt, sei erwähnt der Paragraph über „inverse Operationen", in dem die Zerlegung eines Vektors in Komponenten nach vorgeschriebenen Richtungen behandelt wird, was für die späteren Rechnungen recht wertvoll ist. Man findet überhaupt in diesem Teile viele an sich einfache Dinge, die für die Anwendungen in Physik und Technik von Bedeutung sind. Dem Radiusvektor zum Beispiel wird besondere Aufmerksamkeit zuteil und in § 10, „Sprungflächen", sind Flächengradient, -divergenz und -rotor einer eingehenden Behandlung unterzogen. (Hierzu vgl. F. Emde, Zur

Vektorenrechnung. Archiv f. Math. u. Phys., III. Reihe, XXIV, 1. Heft.) Auch die komplexe Darstellung komplanarer Vektoren ist in Hinsicht auf Schwingungsprobleme ausführlich entwickelt. Durch die Aufgaben, bzw. Lösungen wird der Leser einesteils auf vieles aufmerksam gemacht, was sonst kaum erwähnt zu werden pflegt, andernteils zur Ableitung vielfach gebrauchter Formeln veranlaßt. Der zweite, der Vektoranalysis gewidmete Teil bringt zunächst die „Funktionen skalarer Veränderlicher": die Differentiationen nach Skalaren und recht instruktive geometrische und kinematische Anwendungen. Bei den Funktionen mehrerer Variabeln ist einiges aus der Flächentheorie gegeben (z. B. geometrische Bedeutung der Funktionaldeterminante) und der Begriff der Flächen — speziell des „Hüllen"integrals entwickelt. — Ausgezeichnet ist das umfangreiche Kapitel über „Ortsfunktionen". Die Art, wie hier die in Rede stehenden Operatoren nach allen Seiten durchgearbeitet und beleuchtet — „verdaut" — werden, nicht zum wenigsten durch gute Aufgaben und Lösungen, wird manchen Physiker erfreuen. Vektorielle Ortsfunktionen, Richtungsableitungen, räumliche Ableitungen vektorieller Ortsfunktionen, Divergenz, Gaußscher Satz, dementsprechende hydrodynamische Betrachtungen, Linienintegral, Rotor, Stokesscher Satz, Hüllen- und Raumintegrale — das ist alles wie für den Physiker geschrieben! Erläuterungen und Aufgaben aus der Potential- und der Maxwellschen Theorie sind geschickt angebracht. Bei den zweiten Ableitungen wurden auch schiefwinklige Koordinaten berücksichtigt. Die „Aufgaben" führen hier sehr in Mitte des Stoffes (z. B. die Greenschen Sätze). Flächendivergenz und -rotor werden hier nochmals als Ausartung räumlicher Ableitungen gewonnen. Im Abschnitt „Geometrie der Vektorfelder" ist beachtenswert die Behandlung der Deformation des Integrationsgebiets von Linien-, Flächen- und Raumintegralen. Bei den Funktionen von Ort und Zeit erfährt das bewegte Koordinatensystem Beachtung. Es ist unmöglich, auf die Fülle des Gebotenen einzugehen (z. B. die geometrische Bedeutung bei Divergenz und Rotor, geometrische Eigenschaften des Laplaceschen Feldes). Hingewiesen sei noch auf § 33 u. 34 über krummlinige Koordinaten und räumliche Ableitungen in diesen. Auch in den hierher gehörenden Aufgabenlösungen ist vieles speziell den Physiker Angehende enthalten.

Der Affinorrechnung ist der dritte Teil des Buches zugedacht, und zwar sind im ersten Kapitel die nötigen Grundlagen über lineare Vektorfunktionen gegeben. (Definitionen, Einteilungen, Koordinatendarstellung.) Auch in diesem hochwichtigen Abschnitte ist für anschauliches Verarbeiten und Anwendenlernen bestens gesorgt. Die elastischen Spannungen deformierter Körper, selbstverständlich auch das Tensorellipsoid, die lineare Vektorfunktion in schiefwinkligen Koordinaten und die Faraday-Maxwellschen Spannungen werden hier erörtert. Nach diesen Vorbereitungen wird dann im zweiten Kapitel im Anschluß an F. Jung die von Gibbs als „dyadic", von Budde neuerdings als „Diatensor" bezeichnete geometrische Größe höherer Ordnung als Affinor eingeführt und es werden entwickelt: Koaffinor, Versor, Invarianten des Affinors. Die Darstellung durch Vektoren führt dann zum dyadischen Produkt. Die Affinoren werden sodann als Dyadensummen dargestellt. Als Tensor wird in § 41 der symmetrische Teil des Affinors definiert, während der antimetrische (alternierende) als Axiator bezeichnet wird. Es folgen Abschnitte über Multiplikation von Affinoren, reziproke A., Division von A., A.-reihen, „Versoren" und „Drehstrecker". Man stößt hier auf hochinteressante Entwicklungen — z. B. die Darstellung des Versors als Exponentialfunktion eines Axiators. Nebenbei bemerkt wird durch geeignete Hinweise der Kontakt mit den Darstellungen anderer Autoren ermöglicht. —

Bei der Affinoranalysis sei hervorgehoben, daß die Beleuchtung der Analogien, welche zwischen den auf Skalare, Vektoren oder Affinoren wirkenden Operatoren bestehen, viel zu Verständnis und Übersicht beiträgt. Nach einem Paragraphen über Ableitung von Affinoren nach einem Skalar wird der Nablaaffinor eines Feldvektors (Nabladyade) ausführlich behandelt. Hier findet man auch als Nablaaffinor eines Laplaceschen Vektors den von Schouten Deviator genannten Tensor. Die räumliche Ableitung von Affinoren führt zu dem von Emde (l. c.) als "Traktor" bezeichneten Vektor. (∇ auf Affinor angewandt), ferner zu dem „Vortex" eines Affinors (dies entspricht dem Rotor des Vektors) und zu dem „Turbor" des Affinors (Emde l. c.). Die verallgemeinerten Sätze von Gauß und Stokes finden sich dann auch hier wieder. Auch die Richtungsableitungen von Affinoren werden behandelt. Die letzten Artikel des Buches sind dann den Ableitungen von Affinoren enthaltenden Produkten und den zweiten Ableitungen gewidmet sowie der Darstellung einer stetigen Raumtransformation durch den Nablaaffinor, den Funktionen von Ortsfunktionen und den räumlichen Ableitungen in krummlinigen Koordinaten. — Auch in diesem „nicht einfachen" dritten Teile tritt das Bestreben hervor, den Leser zur Anwendung der Methoden und zur erfolgreichen Lektüre der Spezialwerke zu befähigen. Am Schlusse befindet sich noch eine sehr ausführliche Formelsammlung sowie Namen- und Sachverzeichnis. Die sehr gute Ausstattung des Buches trägt bei dem komplizierten mathematischen Satze auch mit zum leichteren Verständnis bei. Im ganzen läßt sich schwer ein Bild von der Fülle des behandelten Stoffes geben — jedenfalls sei der Physiker nachdrücklich auf dieses hervorragende Lehrbuch aufmerksam gemacht. Horig.

Nachtrag zur Übersicht über die Kriegsbeteiligung der Deutschen Physiker.

Privatdozent für Physik an der Technischen Hochschule Karlsruhe i. B. Dr. **R. Schachenmeier** ist als Leutnant der Landwehr Führer einer drahtlosen Station im Osten.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Wien Dr. Friedrich Kottler für mathematische Physik, an der Universität Budapest für Funktionslehre Dr. Ludwig David (bisher für Theorie der Algebraischen Zahlen und Funktionen an der Universität Klausenburg).

Ernannt: Der Privatdozent an der Universität Leipzig Dr. Christian Füchtbauer zum a.o. Professor für theoretische Physik an die Universität Tübingen, der ord. Professor der Chemie an der Universität Graz Dr. Roland Scholl zum ord. Professor der Organischen Chemie an der Technischen Hochschule Dresden, der Privatdozent an der Universität Würzburg Dr. Friedrich Harms zum etatsmäßigen a.o. Professor der Theoretischen Physik an derselben Hochschule.

Verliehen: Dem Privatdozenten für Chemie an der Universität Halle Dr. Erich Beschke, dem Privatdozenten der Mathematik an der Universität Greifswald Dr. Clemens Thaer, dem Privatdozenten der Astronomie und Meteorologie an der Universität Marburg Dr. Alfred

Wegener, dem Privatdozenten der Physik an der Universität Berlin Dr. James Franck, dem Privatdozenten der Mathematik an der Universität Kiel Dr. Richard Neuendorff, dem Privatdozenten für reine und angewandte Mathematik an der Universität Münster Dr. Aloys Timpe und dem Privatdozenten für Mathematik an der Universität Breslau Dr. Walter Schnee der Titel Professor, dem früheren ord. Professor der Ingenieurwissenschaften an der Technischen Hochschule Dresden Dr. Christian Otto Mohr in Dresden-Blasewitz der Titel und Rang als Wirklicher Geheimer Rat.

Gestorben: Der frühere Dozent für Photographie an der Technischen Hochschule Dresden Hofrat Professor Dr.-ing. Hermann J. Krone, der a.o. Professor für Heizungs-, Lüftungs- und Feuerungstechnik an der Technischen Hochschule Wien Eduard Meter.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1916/17.

Technische Hochschule Brünn.

Jaumann: Allgemeine und technische Physik, $3^1/_2$; Theoretische Physik, $1^1/_2$; Physikalisches Praktikum, 3. — **Lohr**: Elektromagnetische Theorien für bewegte Körper, 1. — **Szarvassi**: Elektrizitätsleitung in Gasen, 2. — **Zickler**: Allgemeine Elektrotechnik, 5; Elektrotechnisches Praktikum II, 8. — **Niethammer**: Bau elektrischer Maschinen II, 3; Projektierung elektrischer Anlagen, 2; Elektrische Konstruktionsübungen I, 10, II, 2. — **Siegel**: Elemente der Elektrotechnik, 2. — **Filepek**: Telegraphie und Telephonie, 2. —

Frenzel: Anorganische Chemie, 6; Analytische Chemie II, 2; Chemische Übungen I, 24, II, $19^1/_2$; Elektrochemisches Praktikum, 3; Physikalische Chemie II, 3. — **Hönig**: Organische Chemie II, 4; Ausgewählte Kapitel der Tier- und Pflanzenchemie, $1^1/_2$; Agrikulturchemie, 3; Chemische Übungen zu Agrikultur- und Nahrungsmittelchemie, 11. — **Kurtenacker**: Mikrochemische Analyse, 1, Übungen, 2. — **Gröger**: Enzyklopädie der technischen Chemie, $1^1/_2$. — **Knöpfer**: Konstitutionsbestimmungen organischer Verbindungen, 2. — **Donath**: Chemische Technologie anorganischer Stoffe II, 3; Chemische Technologie organischer Stoffe I, 3; Übungen im Laboratorium für chemische Technologie I, 20. — **Ulrich**: Chemie der aromatischen Verbindungen, 2; Chemische Technologie organischer Stoffe II, 5, Übungen, 14; Spezielle chemische Technologie der Gerbstoffe, 1; Grundzüge der Textilchemie, 1. — **Margosches**: Chemische Technologie organischer Stoffe III, 2; Chemische Technologie III, 3; Chemische Technologie der organischen Kolloide, 2. —

Tietze: Mathematik I a, 7, Korrepetitionen, 1. — **Waelsch**: Mathematik I b, 4, Korrepetitionen, 1; Darstellende Geometrie, 4; Konstruktives Zeichnen, 8. — **v. Schrutka**: Mathematik II, 3, Korrepetitionen, 1; Elemente der höheren Mathematik, 4, Korrepetitionen, 1; Elliptische Funktionen, 2. — **Benze**: Wahrscheinlichkeitsrechnung I, 2. — **Fanta**: Versicherungsmathematik II, 2, Übungen, 1. — **Löschner**: Technisches Zeichnen II, 4; Plan- und Geländezeichnen, Übungen, 4; Niedere Geodäsie, 5; Elemente der niederen Geodäsie, Situationszeichnen, Übungen, 2; Vermessungsübungen, $4^1/_2$; Höhere Geodäsie, 3. —

Technische Hochschule Graz.

v. **Ettingshausen**: Physik für Ingenieure; Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper, Wärme, Elemente der mechanischen Wärmetheorie, Magnetismus, Elektrostatik, Galvanismus, Elektromagnetismus, Induktion, 5; Elektrotechnik, $3^1/_2$, Übungen, 8; Enzyklopädie der Elektrotechnik, 2. — **Streintz**: Physik für techn. Chemiker; Mechanik, Optik und Wärmelehre, 5, für Geodäten: Mechanik und geometrische Optik, 5. —

Emich: Anorganische Chemie, 7; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten im chemischen Laboratorium, für Vorgeschrittene; Anleitung zur mikrochemischen Analyse, für Vorgeschrittene, nach Verabredung. — **v. Cordier**: Geschichte der Chemie von Lavoisier bis zur Gegenwart, 1. — **v. Hemmelmayr**: Enzyklopädie der technischen Chemie, 2. — **Kremann**: Ausgewählte Kapitel aus der physikalischen Chemie I, 2. — **B. Reinitzer**: Quantitative chemische Analyse I: Gewichts-Analyse, 1, Seminar, 2; Laboratoriumsunterricht und Übungen in der chemischen Gewichtsanalyse, 20; Laboratoriumsunterricht und Übungen in der anorganisch-technisch-chemischen Analyse, 20; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten aus dem Gebiete der anorganischen Chemie und der chemischen Technologie anorganischer Stoffe, für Vorgeschrittene. — **Andreasch**: Qualitative chemische Analyse I, 2; Laboratoriumsunterricht und Übungen in der qualitativen chemischen Analyse, 14; Chemische Technologie der organischen Stoffe: a) Chemische Fabriksindustrie der organischen Stoffe: Teerfarben usw., 4; Laboratoriumsunterricht und Übungen in der Darstellung organisch-chemischer Präparate, 20; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten aus dem Gebiete der organischen Chemie und der chemischen Technologie organischer Stoffe, für Vorgeschrittene. —

Hocevar: Mathematik I: Algebra und Analysis, Analytische Geometrie, 6, Übungen, 2. — **Weitzenböck**: Elemente der höheren Mathematik, 4; Einführung in die Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichsrechnung, 1. — **v. Peithner**: Mathematik II: Geometrie, Integralrechnung, Differentialgleichungen, 4, Übungen, 2. — **Schüssler**: Darstellende Geometrie, 5, Übungen, 6, Repetitorium, 2; Projektive Geometrie I, 3, Übungen, 3, Seminarübungen: a) Unterseminar, 2, b) Oberseminar, 2. — **Wittenbauer**: Allgemeine Mechanik, einschließlich Elemente der graphischen Statik, 4, Übungen, 3 und 2; Technische Mechanik I: Elastizitäts- und Festigkeitslehre, 4; Die Mechanik auf Grund der Vektorenrechnung, 2. — **Klingatsch**: Niedere Geodäsie, 4; Elemente der niederen Geodäsie, 4; Höhere Geodäsie: Methode der kleinsten Quadrate, Das Präzisions-Nivellement, Landesvermessung, 4; Geodätisches Seminar, 6; Situations- und Terraindarstellung, für Bauingenieure, 4 und 2, für Geodäten, 4. —

Universität Wien.

Lecher: Experimentalphysik für Mediziner und Lehramtskandidaten, 5, Demonstrationspraktikum, 4; Physikalische Demonstrationen für Mittelschulen, 6; Anleitung für wissenschaftliche Arbeiten, tägl. — **Exner**: Experimentalphysik, 5; Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten, Chemiker und Naturhistoriker, 6; Wissenschaftliche Arbeiten Vorgeschrittener, tägl. — **Meyer**: Radioaktivität, 3; Besprechung neuerer physikalischer Arbeiten (mit Ehrenhaft), 1 *g*. — **Ehrenhaft**: Theorie des elektromagnetischen Feldes und der Strahlung, 5. — **Haschek**: Interferenz- und Beugungserscheinungen, 3. — **Mache**: Die physikalischen Grundlagen der inneren Ballistik, 1. — **Kohl**: Grundzüge der Hydrodynamik, 2. — **Nabl**: Ergebnisse der neueren theoretisch-physikalischen Forschung, 2. — **Hess**: Atmosphärische Elektrizität, 1. — **Sirk**: Einführung in die kinetische Gastheorie, 2, Übungen, 1. — **Thirring**: Die partiellen Differentialgleichungen in der mathematischen Physik, 2. — **Flamm**: Bau der Atome und Moleküle, 2. — **Defant**: Sonnenstrahlung, 1. — **Schmidt**: Erdbeben und ihre Messung, 1. — **Hinterberger**: Photographisches Praktikum, 12 *g*; Praktischer Kurs über Mikrophotographie, 20 *g*. —

Wegscheider: Theoretische und physikalische Chemie I, 5; Chemische Übungen für Philosophen, tägl. außer Sonnabend; Übungen in der chemischen Analyse für Pharmazeuten, tägl. außer Sonnabend; Arbeiten im I. chemischen Laboratorium für Vorgeschrittene, tägl. — **Herzig**: Über Alkaloide, 2; Übungen aus pharmazeutischer

Chemie für Pharmazeuten, tägl. außer Sonnabend. — **Franke**: Anleitung zur Ausführung chemisch-wissenschaftlicher Arbeiten, tägl. außer Sonnabend; Analytische Chemie im Anschluß an die chemischen Übungen für Mediziner, 1; Maßanalyse, 2; Übungen in der Ausführung chemischer Schulversuche, 2. — **Schacherl**: Ausgewählte Kapitel der Chemie und Technologie der Nahrungsmittel, 2. — **Vortmann**: Praktische Übungen in gerichtlich-chemischer Analyse für Kandidaten der Lebensmittel-Expertise, 3 halbe Tage. — **Billiter**: Ausgewählte Kapitel der anorganisch-chemischen Technologie, 2. — **M. Kohn**: Einführung in das Studium der heterozyklischen Verbindungen der organischen Chemie, 1. — **Abel**: Elektrochemie, 2. —

v. Escherich: Funktionentheorie, 5; Proseminar für Mathematik, 1 *g*; Seminar für Mathematik, 2 *g*; Elementarmathematik, 1 *g*. — **Wirtinger**: Elemente der Differential- und Integralrechnung, 5, Übungen, 1 *g*; Mathematisches Seminar, 2 *g*; Mathematisches Proseminar, 1 *g*. — **Furtwängler**: Zahlentheorie, 5; Elementarmathematik, 1 *g*; Proseminar, 1 *g*; Seminar, 2 *g*. — **G. Kohn**: Einleitung in die synthetische Geometrie, 4, Übungen, 1 *g*; Analytische Geometrie des *n*-dimensionalen Raumes, 2. — **Tauber**: Versicherungsmathematik I, 4. — **Blaschke**: Die Mathematik der öffentlichen Versicherung, 2. — **Roth**: Elliptische und Modulfunktionen, 3. — **Groß**: Konforme Abbildung, 3, Übungen zur Funktionentheorie; Kurs über darstellende Geometrie, 3 *g*. — **Radon**: Quadratische und bilineare Formen unendlich vieler Veränderlicher, 2. — **v. Hepperger**: Sphärische Astronomie, 4. — **Oppenheim**: Mechanik des Himmels, 3, Übungen, 1 *g*; Astronomische Geographie, 2. — **Schram**: Kalendariographie und Zeitrechnung verschiedener Völker, mit Rücksicht auf Historiker, 1. —

Technische Hochschule Wien.

Jäger: Physik für Bauingenieure, 3; Ausgewählte Kapitel der Physik, 2; Optik, für Geodäten, 2. — **Mache**: Physik für Maschinenbauer und technische Chemiker: Wärmelehre, Optik und Akustik, Elektrizitätslehre, 5; Physikalische Grundlagen der inneren Ballistik, 1. — **Liznar**: Meteorologie und die wichtigsten Lehren der Klimatologie für Ingenieure, 2. — **Knoller**: Luftschifffahrt und Automobilwesen, 3. — **Sahulka**: Elektrotechnik für Maschinenbauer, $4^1/_2$, Praktische Übungen I (mit Reithoffer), 4; Elektrotechnische Meßkunde, 2. — **Reithoffer**: Enzyklopädie der Elektrotechnik, für Bauingenieure und technische Chemiker, 2; Elektrische Schwingungen und Wellen, 2. — **N. N.**: Dynamobau, $5^1/_2$, Konstruktionsübungen, 6; Elektrotechnik, Praktische Übungen II, 4. — **Hochenegg**: Elektrische Arbeitsübertragung, mit besonderer Berücksichtigung der elektrischen Bahnen, 3; Bau und Betrieb elektrischer Anlagen einschließlich Stromverteilung, 2, Übungen, 4. — **Paweck**: Elektrochemie, für Elektrotechniker, 2; Technische Elektrochemie, 3. — **Jüllig**: Elektrische Telegraphie und Eisenbahn-Signalwesen, 2. — **Zelisko**: Die Fernsprechtechnik, 2; Die Telegraphentechnik, 1. — **Aigner**: Unterwasser-Telegraphie und -Telephonie, 1. — **Strunz**: Geschichte der Naturwissenschaften und der Naturbetrachtung im Mittelalter und in der Renaissance, 2; Hypothese und Irrtum, geschichtlich betrachtet, 2; Übungen: Neue Literatur über Geschichte der Naturwissenschaften, 2. —

Bamberger: Allgemeine Experimentalchemie I: Anorganische Chemie, 6, Übungen, täglich. — **Suida**: Allgemeine Experimentalchemie II: Organische Chemie II (Die wichtigsten Kapitel aus der Chemie der aromatischen Verbindungen), 4; Chemische Technologie organischer Stoffe, 5, Übungen, tägl. außer Sonnabend. — **Vortmann**: Analytische Chemie, 4, Übungen, tägl. — **Moser**: Qualitative chemische Analyse, 2. — **Ulzer**: Technische Analyse organischer Stoffe, 2. — **Weissenberger**: Anorganisch-chemische Arbeitsmethoden, 1, Übungen, 2. — **v. Jüptner**: Theoretische und physikalische Chemie II, 2, Übungen, 4; Chemische Technologie anorganischer Stoffe, 5, Übungen, tägl. außer Sonnabend; Technische Feuerungen: Wärmelehre, 5. — **Praetorius**: Physikalisch-chemisches Messen und Rechnen, 1. — **Lafar**: Chemie der Nahrungs- und Genußmittel, 2; Technische Mykologie, 2, Übungen für Anfänger, 2. — **Böck**: Chemie der synthetischen organischen Arzneimittel, 2. — **Klimont**: Chemie der hydroaromatischen Verbindungen und Terpene, 2. — **Eder**: Photochemie und angewandte Photographie, 1; Photographisches Praktikum, 4. — **Abel**: Phasenlehre, 2. — **Strache**: Beleuchtungsindustrie, 2, Übungen in Gasbeleuchtung, Brennstoffe und Feuerungsanlagen, 4. — **Oettinger**: Fette und ätherische Öle, $1^1/_2$. — **Erban**: Chemische Textilindustrie I, 2. — **Russ**: Neuere Verfahren der anorganisch-chemischen Großindustrie, $1^1/_2$. —

Zzigmondy: Mathematik I, für Maschinenbauer, 5, Korrepetitionen, 2. — **Rothe**: Mathematik I, für Bauingenieure, 5; Analytische Geometrie der Ebene, 2. — **Czuber**: Mathematik II, 5; Wahrscheinlichkeitsrechnung, 3. — **Suppantschitsch** (ev. Radon): Elemente der höheren Mathematik, 4. — **Reich**: Algebra, 2. — **Radon**: Enzyklopädie der Mathematik, 3; Einführung in die Funktionentheorie: Analysis der komplexen Veränderlichen, 2. — **Tauber**: Versicherungsmathematik I, 4, II, 2. — **Förster**: Politische Arithmetik, 2. — **Blaschke**: Einführung in die mathematische Statistik, 3; Mathematik der öffentlichen Versicherung, 2. — **Müller**: Darstellende Geometrie und konstruktives Zeichnen, für Bauingenieure, 5, Konstruktionsübungen, 6; Konstruktive Behandlung der Regelflächen, 2, Konstruktionsübungen, 2; Seminar für darstellende Geometrie, 2. — **Schmid**: Darstellende Geometrie und konstruktives Zeichnen, für Maschinenbauer, 4, Konstruktionsübungen, 6; Projektive Geometrie I, 3, Konstruktionsübungen, 2. — **Danzer**: Normale und schiefe Axonometrie, 2. — **Wieghardt**: Mechanik I: Mechanik der starren und flüssigen Körper, für Bauingenieure, 5, Übungen, $1^1/_2$. — **Jung**: Mechanik I: Mechanik der starren und flüssigen Körper, für Maschinenbauer, 5, Übungen, 2. — **Kirsch**: Mechanik II: Elastizitäts- und Festigkeitslehre, 5; Übungen, 4. — **Girtler** (ev. Wolf): Enzyklopädie der Mechanik, 5. — **Fillunger**: Analytische Mechanik des elastischen festen Körpers, $1^1/_2$. — **Wolf**: Einführung in die theoretische Elastizitätslehre, 2. — **Leon**: Die Kerbfrage in Theorie und Praxis, 1; Ausgewählte Kapitel der Festigkeitslehre und Materialprüfung, $1^1/_2$. — **Pollack**: Elemente der niederen Geodäsie, 4. — **Dolezal**: Niedere Geodäsie, 6, Übungen I: Instrumental- und Vermessungsübungen, Zimmerübungen, 3; Ausgewählte Kapitel der Niederen Geodäsie, $1^1/_2$; Geodätisches Seminar, 2; Photographische Meßkunst: Photogrammetrie, $1^1/_2$, Übungen, 2. — **Dokulil**: Übungen zur Niederen Geodäsie, für Bauingenieure, II: Kartierungsübungen, 3; Übungen zur Niederen Geodäsie, für Geodäten: Zimmerübungen, 5; Geodätisches Zeichnen: Situationszeichnen, 4; Technik des Katasterwesens, 2, Übungen, $2^1/_2$. — **Schumann**: Höhere Geodäsie, 2; Ausgewählte Kapitel aus Höherer Geodäsie, 1; Übungen im Beobachten und Rechnen, 3. —

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.